

### 5.3 遠心加速度と重力加速度

角速度  $\omega$  を伴う地球の回転によって地表にある単位質量にかかる力を、遠心加速度  $g_\omega$  とする。遠心加速度は回転軸に垂直な線にそって外側に半径方向を向き、図 5-4 に示されるように、P を通る遠心加速度は

$$g_\omega = \omega^2 s \quad (5.46)$$

で与えられる。ただし、 $s$  は P から回転軸への垂直距離である。 $r$  を P から地球の中心への半径方向距離、 $\Phi$  を点 P の緯度とすると、

$$s = r \cos \Phi \quad (5.47)$$

$$g_\omega = \omega^2 r \cos \Phi \quad (5.48)$$

となる。現在、地球の角速度として用いられている値は、

$$\omega = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

である。

地表の質量にかかる万有引力加速度と遠心加速度をあわせて、重力加速度  $g$  とする。 $g_\omega \ll g_m$  であるから、遠心加速度の半径方向成分を  $g_m$  に加え、 $g$  としてよい。(式 (5-16), (5-17) 参照。) 図 5-4 より、遠心加速度の半径方向成分は半径方向外向きである。記号の慣習に従って、内向きの半径方向加速度を正とし、遠心加速度の半径方向成分は、

$$g_{r'} = -g_\omega \cos \Phi = -\omega^2 r \cos^2 \Phi \quad (5.49)$$

と表される。従って、重力加速度  $g$  は、式 (5-44) の  $g_m$  と  $g_{r'}$  の和である。

$$g = \frac{GM}{r^2} - \frac{3GMa^2 J_2}{2r^4} (3 \sin^2 \phi - 1) - \omega^2 r \cos^2 \phi. \quad (5.50)$$

式 (5-50) によって、地球モデル表面上の緯度  $\Phi$ 、質量の中心からの距離  $r$  に位置する点における半径方向内向きの重力加速度が与えられる。

### 5.4 万有引力ポテンシャルとジオイド

重力場に位置すると、質量  $m'$  は万有引力ポテンシャルエネルギーを持つ。このエネルギーは、 $m'$  を無限遠から重力場内のある位置に運ぶときの引力によって  $m'$  にされる負の仕事とみなせる。万有引力ポテンシャル  $V$  は  $m'$  のポテンシャルエネルギーを  $m'$  の質量で割ったものである。重力場は保存性があるので、単位質量あたりのポテンシャルエネルギー  $V$  は場における位置のみに依存し、質量がその場所に運ばれた経路にはよらない。回転するゆがんだ地球モデルにおいて  $V$  を計算するために、単位質量を無限遠からモデルの中心から半径方向に距離  $r$  の位置まで運ぶことを考える。モデルの重

力場によって単位質量にされる負の仕事は、距離の増分を  $dr$  としたときの、式 (5-44) の単位質量あたりの力  $g_m$  の積分である。(万有引力加速度と増分  $dr$  は方向が逆である。)

$$V = \int_{\infty}^r \left\{ \frac{GM}{r'^2} - \frac{3GMa^2 J_2}{2r'^4} (3 \sin^2 \phi - 1) \right\} dr' \quad (5.51)$$

または

$$V = -\frac{GM}{r} + \frac{GMa^2 J_2}{2r^3} (3 \sin^2 \phi - 1) \quad (5.52)$$

$V$  の値を求めるために、無限遠方における地球からのポテンシャルエネルギーをゼロと仮定する。地球の近傍での万有引力ポテンシャルは負となり、地球はポテンシャルの井戸として働く。式 (5-52) の初項は質点による万有引力ポテンシャルである。また、任意の球対称な質量の外側の万有引力ポテンシャル分布でもある。第二項は地球モデルの回転に誘発される扁平率のポテンシャルの効果を表している。等万有引力ポテンシャル面とは、 $V$  が等しい面である。等万有引力ポテンシャルは、球対称な質量分布に対しては球形となる。

(5-44) と (5-52) を比較すると、 $V$  は万有引力加速度  $g_m$  の半径方向成分の  $r$  に関する積分であることが分かる。万有引力と地球モデルの回転の両方を説明する重力ポテンシャル  $U$  を得るために、 $r$  に関して式 (5-50) の重力加速度  $g$  の半径方向成分の積分をすると次のようになる。

$$U = -\frac{GM}{r} + \frac{GMa^2 J_2}{2r^3} (3 \sin^2 \phi - 1) - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \phi. \quad (5.53)$$

等重力ポテンシャルは  $U$  が等しい面である。ある等ポテンシャル面を海水面数メートルに定める。すると、海水面からの高度は、基準とする等ポテンシャル面からの距離となる。

海水面を定めた基準の等ポテンシャル面はジオイドと呼ばれる。ここからは、ジオイド面が式 (5-53) で与えられた重力ポテンシャルの二次展開と矛盾のないことを説明していく。赤道での重力ポテンシャルの値は、式 (5-53) に  $r = a$ ,  $\Phi = 0$  を代入することで、

$$U_0 = -\frac{GM}{a} \left( 1 + \frac{1}{2} J_2 \right) - \frac{1}{2} a^2 \omega^2. \quad (5.54)$$

という結果が得られる。極での重力ポテンシャルの値は  $U_0$  とならなければならない。なぜなら、地球モデルの表面を等ポテンシャル面と定義しているからである。 $r = c$  (地球の極の半径)、 $\Phi = \pm \pi/2$  を式 (5-53) に代入すると

$$U_0 = -\frac{GM}{c} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{a}{c} \right)^2 \right]. \quad (5.55)$$

を得る。このジオイドの扁平率（楕円率）は以下で定義される。

$$f \equiv \frac{a-c}{a}. \quad (5.56)$$

扁平率は非常に小さく、 $f \ll 1$  である。扁平率  $f$  を  $J_2$  に結び付けるために、式 (5-54) と (5-55) を等しいとして、次を得る。

$$1 + \frac{1}{2} J_2 + \frac{1}{2} \frac{a^3 \omega^2}{GM} = \frac{a}{c} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{a}{c} \right)^2 \right]. \quad (5.57)$$

$c = a(1-f)$  を代入し、 $f \ll 1$  と  $J_2 \ll 1$  より  $f$  と  $J_2$  に関して二次以上の項を無視すると、

$$f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} \frac{a^3 \omega^2}{GM}. \quad (5.58)$$

となる。式 (5-45) から、 $a^3 \omega^2 / GM = 3.46139 \times 10^{-3}$  と  $J_2 = 1.0826265 \times 10^{-3}$  を用いて、式 (5-58) より  $f = 3.3546 \times 10^{-3}$  となる。式中の高次の項を保持することでより正確な値が求められる。

$$f = 3.35281068 \times 10^{-3} = \frac{1}{298.257222}. \quad (5.59)$$

ただし、惑星体の表面が等ポテンシャルである場合のみ式 (5-58) が有効であることに留意せよ。

ジオイドモデルの形は球形に近い。つまり、 $r_0$  がジオイドまでの距離であるとする、 $\varepsilon \ll 1$  で

$$r_0 \approx a(1-\varepsilon) \quad (5.60)$$

となる。式 (5-53) で  $U=U_0$ 、 $r=r_0$  とし、 $U_0$  に式 (5-54) を、 $r_0$  に式 (5-60) を代入し、 $f$ 、 $J_2$ 、 $a^3 \omega^2 / GM$ 、 $\varepsilon$  の二次以上の項を無視すると、

$$\varepsilon = \left( \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} \frac{a^3 \omega^2}{GM} \right) \sin^2 \phi. \quad (5.61)$$

が得られる。式 (5-61) を式 (5-60) に代入すると、

$$r_0 = a \left\{ 1 - \left( \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} \frac{a^3 \omega^2}{GM} \right) \sin^2 \phi \right\} \quad (5.62)$$

あるいは、

$$r_0 = a(1 - f \sin^2 \phi). \quad (5.63)$$

としてジオイドの近似モデルの式が得られる。無次元量  $a^3 \omega^2 / GM$  は、地球の質量による万有引力加速度に対する、地球の回転による遠心加速度の相対的な重要度の指針であ

る。回転による寄与は全体の約 0.33%である。

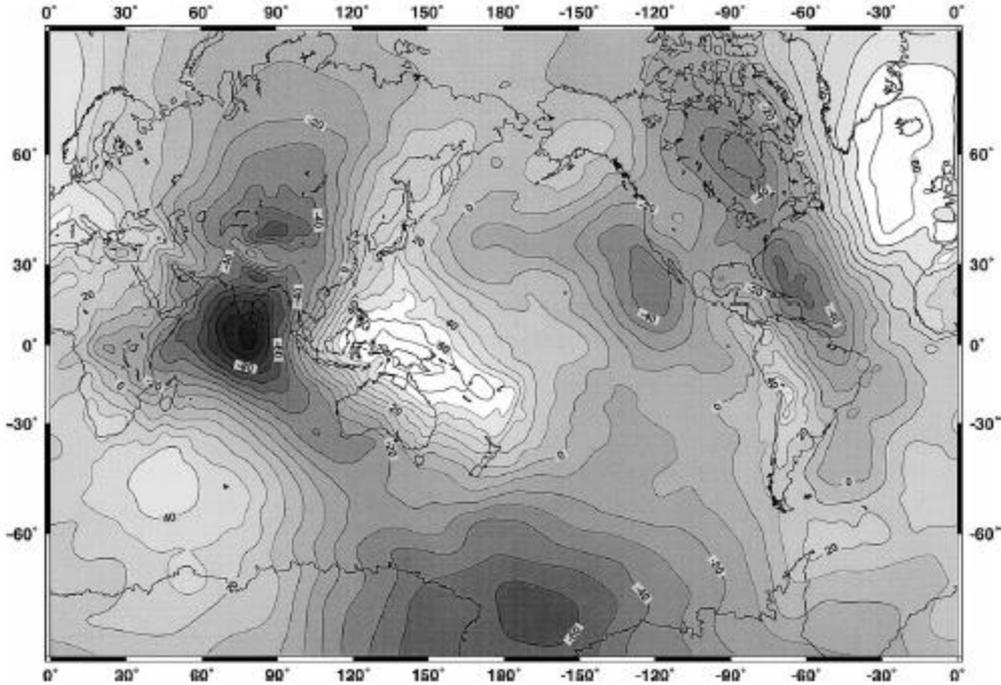


図 5.5 基準楕円率 WGS84 のジオイド高 (EGM96) (Lemoine et al.,1998)

解析を進めるにあたり、 $J_2$ と  $a^3 \omega^2 / GM$  に関し線形な項のみを考察する。ジオイドアノマリーを測る基準となるジオイドを規定するためには、高次の項を含む必要がある。慣習により、基準ジオイドは、以下の赤道半径と極半径の項によって定義される回転楕円体 (回転楕円面) である。

$$\frac{r_0^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{r_0^2 \sin^2 \phi}{c^2} = 1. \quad (5.64)$$

回転楕円体の離心率  $e$  は、

$$e \equiv \left( \frac{a^2 - c^2}{a^2} \right)^{1/2} = (2f - f^2)^{1/2}. \quad (5.65)$$

で与えられる。常套的に基準ジオイドを赤道半径と扁平率の項に展開すると、以下のようになる。

$$\frac{r_0^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{r_0^2 \sin^2 \phi}{a^2(1-f)^2} = 1 \quad (5.66)$$

$$r_0 = a \left[ 1 + \frac{(2f - f^2)}{(1-f)^2} \sin^2 \phi \right]^{-1/2}. \quad (5.67)$$

式 (5-67) を  $f$  の累乗に展開し、 $f$  の二次以上の項を無視すると、結果は式 (5-63) と一致する。式 (5-67) で  $a=6378.137$  km,  $f = 1/298.257222$  としたものを基準ジ

オイドと定義する。

観測ジオイドと基準ジオイドの高度差 $\Delta N$ はジオイドアノマリーと呼ばれる。ジオイドアノマリーの地図は図 5-5 に示されている。最大のジオイドアノマリーは 100m 付近で、これは赤道半径と極半径の 21 km もの差のおよそ 0.5% である。明らかに、観測ジオイドは基準ジオイドの回転楕円体の形に非常に近い。

図 5-5 に示されている主なジオイドアノマリーは、地球の密度不均質によるものであろう。図 1-1 のプレート分布と比較すると、主なアノマリーにはプレートテクトニクスと直接的に関連しているものがあることが分かる。ニューギニアとチリ - ペルーのジオイド高を例にとると、プレートの沈み込みと明らかな関連がある。高密度の沈み込んだリソスフェアによる過剰な質量がジオイドの上昇を引き起こしている。中国の負のジオイドアノマリーは、インドプレートとユーラシアプレートによる大陸の衝突に関連しているであろうし、カナダのハドソン湾の低いジオイドは、氷河期後の反発（セクション 6-10 参照）に関連しているであろう。最大のジオイドアノマリーは、インド南端沖の負のジオイドアノマリーで、100m の大きさがある。表面に何の変哲もないこのジオイドアノマリーには満足な説明ができていない。同じような説明のつかない負のジオイドアノマリーは北アメリカ西海岸沖にもある。

基準ジオイドと関連したジオイドアノマリーの定義はいくらか恣意的である。基準ジオイド自体が地球内部の密度異常を平均したものを含んでいる。代替手段として、静水のジオイドと関連したジオイドアノマリーを定義する方法がある。地球は密度の観点から層構造を持つと推定されているが、それぞれの層は地球の自転に関連した静水学平衡にある。二つの方法でアノマリーの図はかなり違うが、主要な特徴は影響を受けていない。

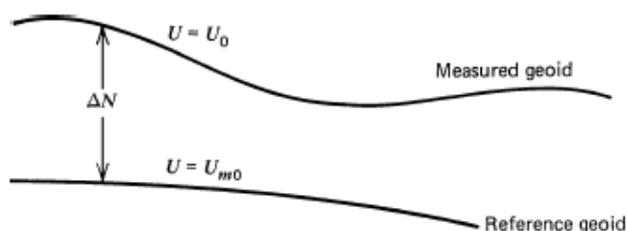


図 5.6 観測ジオイド、基準ジオイドとジオイドアノマリー $\Delta N$ の関係

測地学における主要な懸念事のひとつは、地形と水深を定義することだ。どちらも「海水面」に関する計測である。海水面は、不変な  $U$  の値に対応する等ポテンシャル面と非常に近くなる。議論してきたように、基準の回転楕円体面と関わりのあるジオイドアノマリーは 100m ほどの大きさになる。従って、回転楕円体を用いて海水面を定義すると、この量のせいで失敗するであろう。どんな地点の地形（と水深）も、その地点の海水面（等ポテンシャル面）に近似した面と関連させて計測しなければならない。

基準ジオイドをもとに計測された重力場のポテンシャル中のアノマリー $\Delta U$ は、ジオ

イドアノマリー  $\Delta N$  と直接的に関連している。ポテンシャルアノマリーは、

$$\Delta U = U_{m0} - U_0, \quad (5.68)$$

で定義される。ただし、 $U_{m0}$  は基準ジオイド上の点で観測されたポテンシャル、 $U_0$  は式 (5-54) で定義されたポテンシャルの基準値である。図 5-6 の通り、観測ジオイドのポテンシャルは  $U_0$  である。図から分かるように、 $U_0$ 、 $U_{m0}$ 、 $\Delta N$  は以下の関係にある。

$$U_0 = U_{m0} + \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=r_0} \Delta N, \quad (5.69)$$

ただし、 $\Delta N/a \ll 1$  に留意せよ。式 (5-53) の微分から、ポテンシャルを重力加速度の積分によって求めたことを思い出してほしい。このことから、式 (5-69) のポテンシャルの半径に関する導関数は基準ジオイド上の重力加速度となる。要求される精度では、

$$\left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=r_0} = g_0, \quad (5.70)$$

と書け、 $g_0$  は基準ジオイドにおける基準重力加速度である。ちょうど基準ジオイドにおける観測ポテンシャルが  $U_0$  異なるように、基準ジオイドにおける観測重力加速度は  $g_0$  異なる。しかし、我々の目的のためには式 (5-69) の  $(\partial U / \partial r)_{r=r_0}$  に  $g_0$  を用いてよく、この項は微小量  $\Delta N$  がかかるからである。式 (5-69) と (5-70) を式 (5-68) に代入して、

$$\Delta U = -g_0 \Delta N. \quad (5.71)$$

が得られる。局所的な質量過剰は等重力ポテンシャルに外向きのひずみを生み、それゆえ、正の  $\Delta N$  と負の  $\Delta U$  を生む。観測ジオイドは本質的に海水面を決定することを注意してほしい。海水面の等ポテンシャル面からのずれは、月と太陽の潮汐や風、海流が原因である。これらの影響は一般に数メートルである。基準ジオイドにおける基準重力加速度は、式 (5-62) で与えられた  $r_0$  の式を式 (5-50) に代入し、結果を  $J_2$  と  $a^3 \omega^2 / GM$  の二次以上の項を無視することで単純化することで求められる。

$$g_0 = \frac{GM}{a^2} \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 \cos^2 \phi \right) + a \omega^2 (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi). \quad (5.72)$$

重力アノマリーの観測基準となる通常の正規重力を与えるために、 $g_0$  に関する式の高次の項は残さなければならない。重力アノマリーは基準ジオイドにおける  $g$  の観測値と  $g_0$  の差である。1980 年の国際的な取り決めで正規重力場は、

$$\begin{aligned} g_0 = & 9.7803267715(1 + 0.0052790414 \sin^2 \phi \\ & + 0.0000232718 \sin^4 \phi \\ & + 0.0000001262 \sin^6 \phi \\ & + 0.0000000007 \sin^8 \phi), \end{aligned} \quad (5.73)$$

と定められた。 $g_0$  の単位は  $\text{ms}^{-2}$  である。これは測地基準系 1980 (GRS80) 公式として知られている。式 (5-73) で与えられた通常の正規重力場は、式 (5-72) の  $g_0$  と式 (5-

67) の  $r_0$  の両方を記述するのに使われた一致二次近似よりも、より高次の  $\Phi$  に関する近似である。重力アノマリーに適した SI 単位は  $\text{mm s}^{-2}$  である。