

【5.3 遠心力加速度と重力加速度】

角速度 ω で地球が回転することにより地球表面上の単位質量に生じる力は、遠心力加速度 g_ω という。図 5-4 に示されているように、遠心力加速度は回転軸の垂線に沿って動径方向外向きを向いており、 P を通り、そして、

$$g_\omega = \omega^2 s \quad (5.46)$$

で与えられる。ここで、 s は、 P から回転軸までの垂線距離である。 r を P から地球の中心までの動径距離とし、 ϕ を点 P の緯度とすると、

$$s = r \cos \phi \quad (5.47)$$

と

$$g_\omega = \omega^2 r \cos \phi \quad (5.48)$$

となる。現在受け入れられている地球の角速度の値は、

$$\omega = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

である。

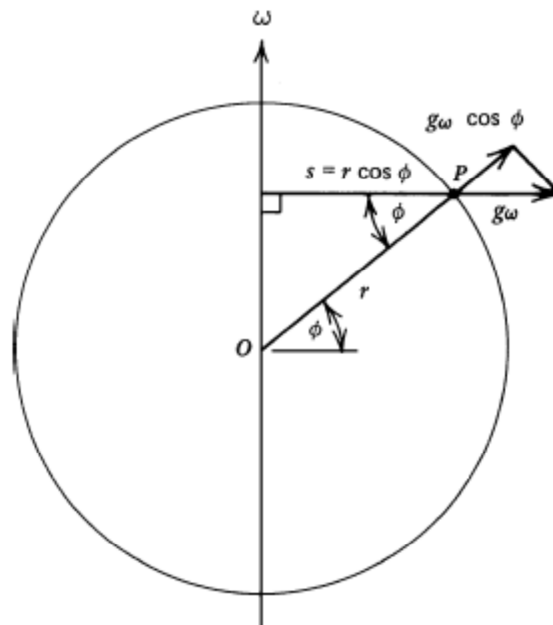


Figure 5.4 Centrifugal acceleration at a point on the Earth's surface.

地球表面上の質点の、地球との引力による加速度と遠心力加速度は、合成すると重力加速度 g となる。 $g_\omega \ll g_m$ であるから、 g を得るには、 g_m に遠心力加速度の動径成分を加えるのがよい。式 (5.16) と (5.17) を見よ。図 5-4 にあるように、遠心力加速度の動径成分は動径方向外向きを向いている。動径方向内向きの加速度を正にとるという我々の符号のつけ方の習慣に合わせて、遠心力加速度の動径成分は、

$$g'_r = -g_\omega \cos \phi = -\omega^2 r \cos^2 \phi \quad (5.49)$$

となる。したがって、重力加速度 g は式 (5.44) の g_m と g'_r との和、すなわち、

$$g = \frac{GM}{r^2} - \frac{3GMa^2 J_2}{2r^4} (3\sin^2 \phi - 1) - \omega^2 r \cos^2 \phi \quad (5.50)$$

である。式 (5.50) は、地球モデルの表面上の緯度 ϕ 、地球の中心からの距離 r に位置する点における動径内向きの重力加速度を与えている。

【5.4 重力ポテンシャルとジオイド】

万有引力場における質量 m' の位置によって、質量 m' は「重力ポテンシャルエネルギー」を持つ。そのエネルギーは、 m' を無限遠から場の中の m' の位置へ引き付ける万有引力によってなされた負の仕事とみなすことができる。「万有引力ポテンシャル」 V は、 m' の単位質量あたりのポテンシャルエネルギーである。万有引力場は「保存力場」であるので、単位質量あたりのポテンシャルエネルギー V は、場における位置のみに依存し、質点はその位置に運ばれてきた経路には依存しない。回転によって歪んだ地球モデルでの V を計算するために、単位質量を無限遠から、モデルの中心から動径方向の経路に沿って距離 r のところまで持ってくるのが想像できる。モデルでの万有引力場による単位質量になされる負の仕事は、単位質量あたりにかかる力である、式 (5.44) における g_m と、距離の増分 dr との積の積分であり（重力加速度と増分 dr は反対方向を向いている）、

$$V = \int_{\infty}^r \left\{ \frac{GM}{r'^2} - \frac{3GMa^2J_2}{2r'^4} (3 \sin^2 \phi - 1) \right\} dr' \quad (5.51)$$

すなわち、

$$V = -\frac{GM}{r} + \frac{GMa^2J_2}{2r^3} (3 \sin^2 \phi - 1) \quad (5.52)$$

となる。 V を評価すると、地球から無限大に離れた場所でのポテンシャルエネルギーは零であると推定できる。地球表面付近の万有引力ポテンシャルは負になり、地球はポテンシャル井戸としてふるまう。式 (5-52) の第 1 項は、質点の万有引力ポテンシャルである。第 2 項は、地球モデルが回転することによって扁平になっていることによるポテンシャルへの影響である。「等万有引力ポテンシャル面」とは、 V が一定となっている面のことである。等万有引力ポテンシャル面は、球対称の質量分布に対しては球面である。

式 (5-44) と (5-52) とを比較すると、 V は、万有引力加速度 g_m の動径成分の、 r に関する積分であることがわかる。地球モデルの重力と回転による「重力ポテンシャル」 U を得るために、式 (5-50) における重力加速度 g の動径成分の、 r に関する積分をとることができ、その結果、

$$U = -\frac{GM}{r} + \frac{GMa^2J_2}{2r^3} (3 \sin^2 \phi - 1) - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \phi \quad (5.53)$$

となる。「等重力ポテンシャル面」は、 U が一定である面である。数メートル程度までであれば、海面が等ポテンシャル面を表している。したがって、海面水位から上下に移動すると、その上下分が基準となる等ポテンシャル面からの距離となる。

海面を表す基準の等ポテンシャル面は、「ジオイド」と呼ばれる。式 (5-53) で与えられた重力ポテンシャルの二次までの展開と一致するジオイド面の式は今得られるだろう。赤道での地球表面上の重力ポテンシャルの値は、 $r = a$ と $\phi = 0$ を式 (5-53) に代入すると、結果、

$$U_0 = -\frac{GM}{a} \left(1 + \frac{1}{2} J_2 \right) - \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \quad (5.54)$$

となる。極での表面上での重力ポテンシャルも U_0 にならなければならない、というのも、地球モデルの表面を等ポテンシャル面と定義しているからである。式(5-53)に $r = c$ (地球の極方向半径)と $\pm\pi/2$ を代入すると、

$$U_0 = -\frac{GM}{c} \left[1 - J_2 \left(\frac{a}{c} \right)^2 \right] \quad (5.55)$$

が得られる。このジオイドの「つぶれぐあい」(「扁平率」)は、

$$f \equiv \frac{a - c}{a} \quad (5.56)$$

で定義される。つぶれぐあいは非常に小さい。すなわち、 $f \ll 1$ である。つぶれぐあい f を J_2 に関連づけるため、式(5-54)と(5-55)を等しいとし、

$$1 + \frac{1}{2}J_2 + \frac{1}{2} \frac{a^3 \omega^2}{GM} = \frac{a}{c} \left[1 - J_2 \left(\frac{a}{c} \right)^2 \right] \quad (5.57)$$

を得る。 $c = a(1 - f)$ を代入し、 $f \ll 1$ かつ $J_2 \ll 1$ だから、 f と J_2 についての二次の項とより高次の項を無視すると、

$$f = \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2} \frac{a^3 \omega^2}{GM} \quad (5.58)$$

が得られる。式(5-45)より、 $a^3 \omega^2 / GM = 3.46139 \times 10^{-3}$ と $J_2 = 1.0826265 \times 10^{-3}$ を利用すると、式(5-58)より、 $f = 3.3546 \times 10^{-3}$ が得られる。理論式の中で高次の項を残したままにすると、より正確な値

$$f = 3.35281068 \times 10^{-3} = \frac{1}{298.257222} \quad (5.59)$$

が得られる。式(5-58)は惑星の表面が等ポテンシャルであってはいじめて使えることを強調したい。

ジオイドモデルの形はほぼ球面である。すなわち、 r_0 をジオイドまでの距離とすると、

$$r_0 \approx a(1 - \varepsilon) \quad (5.60)$$

となり、 $\varepsilon \ll 1$ である。式(5-53)において $U = U_0$ 、 $r = r_0$ とし、 U_0 に式(5-54)を、 r_0 に式(5-60)を代入して、 f 、 J_2 、 $a^3 \omega^2 / GM$ 、 ε についての二次以上の項を無視すると、

$$\varepsilon = \left(\frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2} \frac{a^3 \omega^2}{GM} \right) \sin^2 \phi \quad (5.61)$$

が得られる。式 (5-60) に式 (5-61) を代入すると、ジオイドに対する近似モデル方程式は、

$$r_0 = a \left\{ 1 - \left(\frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2} \frac{a^3 \omega^2}{GM} \right) \sin^2 \phi \right\} \quad (5.62)$$

すなわち、

$$r_0 = a(1 - f \sin^2 \phi) \quad (5.63)$$

となる。無次元量 $a^3 \omega^2 / GM$ が、地球の質量による万有引力に対する、地球の回転による遠心力加速度の重要性の指標となる。回転の寄与は、質量の寄与の約 0.33% である。

前述の解析では、 J_2 と $a^3 \omega^2 / GM$ の線形項のみを考慮していた。ジオイド異常を測定するための基準のジオイドを与えるためには、より高次の項を含む必要がある。慣習により、「基準ジオイド」は、

$$\frac{r_0^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{r_0^2 \sin^2 \phi}{c^2} = 1 \quad (5.64)$$

により赤道半径と極半径で定義される「回転楕円体（回転した楕円面）」である。回転楕円体の「離心率」 e は、

$$e \equiv \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2} \right)^{1/2} = (2f - f^2)^{1/2} \quad (5.65)$$

で与えられる。基準ジオイドを赤道半径と扁平率で表現するのがよくある習慣で、その結果、

$$\frac{r_0^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{r_0^2 \sin^2 \phi}{a^2(1-f)^2} = 1 \quad (5.66)$$

すなわち、

$$r_0 = a \left[1 + \frac{(2f - f^2)}{(1-f)^2} \sin^2 \phi \right]^{-1/2} \quad (5.67)$$

となる。式 (5-67) を f のべき乗で展開して、二次以上の項を無視すると、結果は式 (5-63)

と一致する。式 (5-67) に $a = 6378.137 \text{ km}$ と $f = 1/298.257222$ を代入すると、それが

基準ジオイドとなる。

測定したジオイドと基準ジオイドとの間の上下差 ΔN は、「ジオイド異常」と呼ばれる。ジオイド異常の分布図は、図 5-5 のように与えられる。ジオイド異常の最大値は 100 m 前後で、これは赤道半径と極半径の差 21 km の約 0.5% である。明らかに、測定したジオイドは回転楕円体面の基準ジオイドに非常に近い。

図 5-5 に示されている大きなジオイド異常は、地球の密度の不均質が原因といえる。図 1-1 に示されている表面プレートの分布を比較すると、いくつかの大きな異常はプレートテクトニクス現象と直接関連しうることがわかる。ニューギニアやチリ - ペルー上の高ジオイドが例である。これらは明らかにプレートの沈み込みと関わっている。密度の高い塊が過剰にリソスフェアに沈み込むとジオイドの上下が起きる。中国の負のジオイド異常はインドプレートとユーラシアプレートの間の大陸衝突と関わっているか

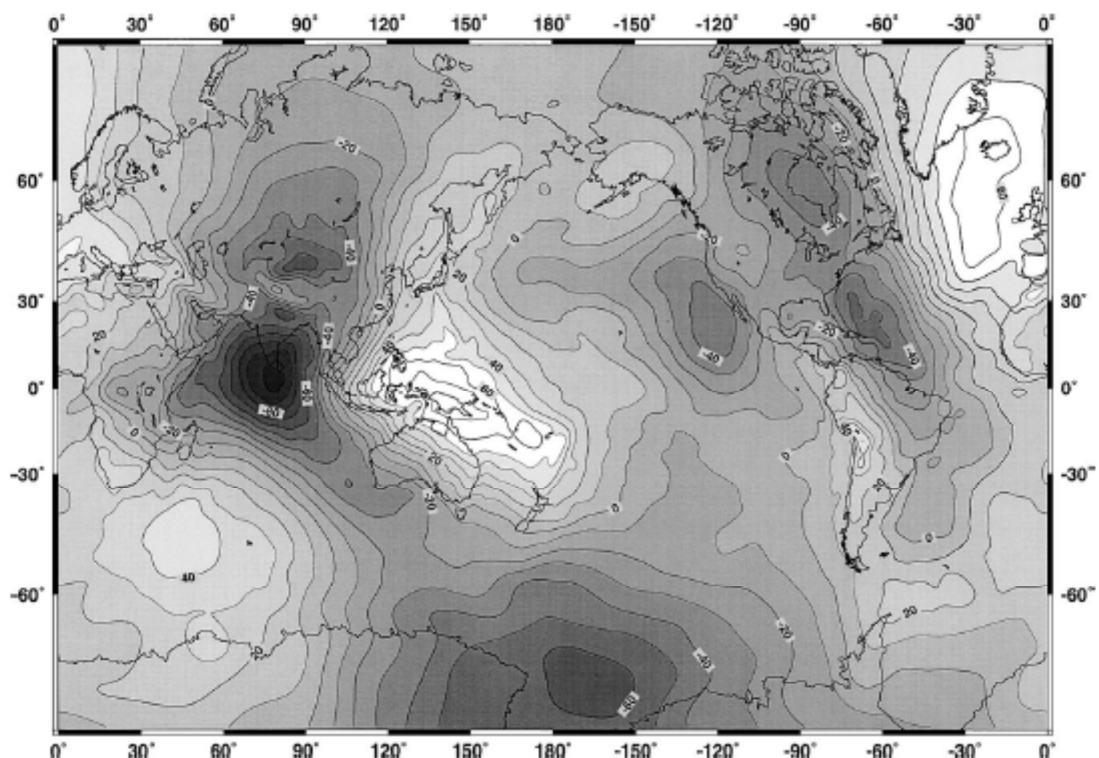


Figure 5.5 Geoid height (EGM96) above reference ellipsoid WGS84 (Lemoine et al., 1998).

もしれないし、カナダのハドソン湾のジオイドの低さは、ポストグレイシャルリバウンド (セクション 6-10 参照) と関わっているかもしれない。最も大きいジオイド異常は、インド南端の負のジオイド異常で、大きさが 100 m である。このジオイド異常は十分な説明がされていない。というのも、表面に何も特徴がないのである。似たようなまだ説明されていない負のジオイド異常が北アメリカの西岸にある。

基準ジオイドに対するジオイド異常の定義はある程度恣意的である。基準ジオイドそれ自体が地球内部の密度異常の平均を含んでいる。地球は密度に関して層状の構造をもっていると思われるが、それぞれの層は地球の回転に対して静水圧平衡にある。異常の分布図は二つの測定で大きく異なるが、主な特徴は影響されずに残る。

測地学における主な関心事の一つが、地形と海底地形を明らかにすることである。両方とも「海面水位」とに対して相対的に測定される。海面水位は U が一定値をとる等ポテンシャル面によく近似される。議論してきたように、基準の回転楕円体面に対するジオイド異常は 100 m にもなりうる。したがって、海面水位を回転楕円体と決めれば、この量だけ誤差が出るだろう。いかなる地域の地形 (と海底地形) もその海面水位 (等ポテンシャル面) を近似する面と比較して測定しなければならない。

基準ジオイド上で測定された重力ポテンシャルの異常 ΔU は、ジオイド異常 ΔN と直接関わりうる。「ポテンシャル異常」は、

$$\Delta U = U_{m0} - U_0 \quad (5.68)$$

で定義される。ここで、 U_{m0} は基準ジオイド上の場所で測定されたポテンシャルで、 U_0 は、式 (5-54) で定義されたポテンシャルの基準値である。図 5-6 に示されているように、測定したジオイド上でのポテンシャルは U_0 である。その図から、 U_0 、 U_{m0} 、 ΔN が、 $\Delta N/a \ll 1$ であることから、

$$U_0 = U_{m0} + \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=r_0} \Delta N \quad (5.69)$$

の関係にあることがわかる。式 (5-53) を得た過程から、我々が重力加速度を積分する

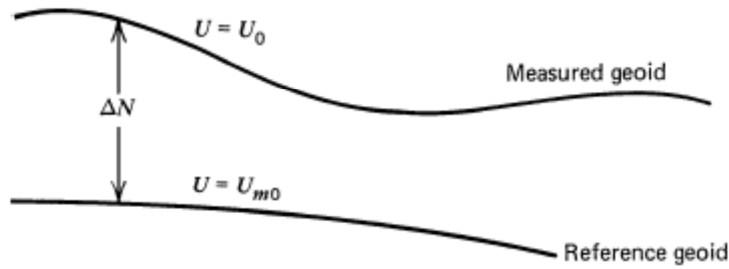


Figure 5.6 Relationship of measured and reference geoids and geoid anomaly ΔN .

ことでポテンシャルを得たことを思い出そう。よって、式 (5-69) でポテンシャルを動径で微分すると、基準ジオイドでの重力加速度となる。正確のため、

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=r_0} = g_0 \quad (5.70)$$

と書ける。 g_0 は基準ジオイド上での基準重力加速度である。ちょうど基準ジオイドで測定したポテンシャルが U_0 とは異なるように、基準ジオイドで測定した重力加速度も g_0 とは異なる。しかし、目的のため、式 (5-69) で g_0 を $(\partial U / \partial r)_{r=r_0}$ にあてることができる。というのも、この項は小さな量 ΔN が掛かっているからである。式 (5-69) と (5-70) を式 (5-68) に代入すると、

$$\Delta U = -g_0 \Delta N \quad (5.71)$$

が得られる。局所的な質量過剰によって等重力ポテンシャル面が外向きに移動するため、 ΔN が正で、 ΔU は負となる。測定したジオイドが本質的に海面水位を決めることに気付いてほしい。等ポテンシャル面からの海面水位の偏差は、月や太陽による潮汐、風、海流によるものである。これらの影響は一般的に数メートルである。

基準ジオイド上での基準重力加速度は、式 (5-62) で与えられる r_0 の表式を式 (5-50) に代入して、 J_2 と $a^3 \omega^2 / GM$ に関する二次以上の項を無視して単純化することによって得られる。得られる式は、

$$g_0 = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{3}{2} J_2 \cos^2 \phi \right) + a \omega^2 (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \quad (5.72)$$

である。重力異常を測定する基準となる標準の「正規重力」を与えるためには、 g_0 の式においてより高次の項を考慮しなければならない。重力異常は、測定された、基準ジオイド上での g の値と g_0 の値との差である。1980年の国際的な合意により、基準重力場は、単位を m s^{-2} として、

$$\begin{aligned} g_0 = & 9.7803267715(1 + 0.0052790414 \sin^2 \phi \\ & + 0.0000232718 \sin^4 \phi \\ & + 0.0000001262 \sin^6 \phi \\ & + 0.0000000007 \sin^8 \phi) \end{aligned} \quad (5.73)$$

と定義された。これは、「測地基準系 (GRS) 1980」として知られている。式 (5-73) で与えられる標準の正規重力場は、式 (5-72) における g_0 と式 (5-67) における r_0 の両方を区別してきた同一の二次までの近似よりも ϕ についてより高次の式である。重力異常を表すのに適切な SI 単位は、 mm s^{-2} である。