5.3 遠心加速度と重力加速度

角速度 ω で地球が回転するため、地球の表面における単位量となる力は、遠心加速度 g_ω であるそれは、図 5-4 に記されたように、放射状に外に向かって、回転軸に対する垂直線に沿って、点 p を通過しているのを示している。そして、以下の式で与えられる。

$$g_\omega = \omega^2 s, \tag{5.46}$$

s は、点 p から回転軸までの垂直距離である。もし、r が点 p から地球の中心までの半径距離で、 ϕ が点 p の緯度であるならば、

$$s = r\cos\phi \tag{5.47}$$

とおけて、

$$g_\omega = \omega^2 r\cos\phi. \tag{5.48}$$

とおける。地球の角速度に対する最新の値は、以下の通りである。

$$\omega = 7.292115 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad\ s^{-1}}.$$

地球の表面において、物質の重力角速度と遠心角速度は、重力の加速度 g を生じさせるために結びついている。$g_\omega \ll g_m$ であるため、g を得るために、遠心加速度の動径成分を g_m に加えることが正しいのである。式(5-16),(5-17)を踏まえて、図 5-4 に記されたように、遠心加速度の動径成分は、放射状に外に向かっていることを示している。向心加速度が正であるという、我々の決まりごとにおける同意の下で、遠心加速度の動径成分は以下のようになる。

$$g'_r = -g_\omega\cos\phi = -\omega^2 r\cos^2\phi. \tag{5.49}$$

したがって、重力加速度 g は式(5-44)の g_m と g'_r 合計となるので、以下のようになる。

$$g = \frac{GM}{r^2} - \frac{3GMa^2J_2}{2r^4}(3\sin^2\phi - 1) - \omega^2 r\cos^2\phi. \tag{5.50}$$

ある点に対する放射状の重力の向心加速度が緯度 ϕ で物質の中心からの距離 r における、地球モデルの表面に位置することを式(5-50)は示している。

5.4　重力ポテンシャルとジオイド

重力場にある位置のおかげで質量 m' は、重力ポテンシャルエネルギーを持っている。そのエネルギーは、無限遠方からその場の位置にまで m' を持ち出すことにおける万有引力によって、m' になされる負の仕事としてみなされる。万有引力ポテンシャル V は、その質量に割り当てられた m' のポテンシャルエネルギーなのである。万有引力場が連続であるので、単位質量 V あたりのポテンシャルエネルギーは、その場における位置にのみ依存するのであって、ある物質がその位置にまで動かされる経路には依存しないのである。回転した歪な地球モデルに対する V を計算するために、無限遠方から動径経路に沿って、そのモデルの中心からの距離 r までのある単位質量を動かすことを考える。そのモデルの万有引力場によって、その単位質量上でなされた負の仕事が距離の増加分 dr （重力加速度と増加分 dr は　正反対に結びついている）でもって、式(5-44)にある単位質量 g_m 毎とする力の生成の積分となっている。

$$V = \int_{\infty}^{r} \left\{ \frac{GM}{r'^2} - \frac{3GMa^2J_2}{2r'^4}(3\sin^2\phi - 1) \right\} dr' \qquad (5.51)$$

もしくは

$$V = -\frac{GM}{r} + \frac{GMa^2J_2}{2r^3}(3\sin^2\phi - 1). \qquad (5.52)$$

V を求める際に、地球からの無限遠方距離における、ポテンシャルエネルギーが 0 であることを想定する。地球近辺の万有引力ポテンシャルは負である。つまり、地球がポテンシャル井戸として働くのである。式(5-52)の初項は、質点の万有引力ポテンシャルである。これはまた、あらゆる球状の対称的な質量分布の外側ポテンシャルでもある。第二項は、地球モデルが回転して引き起こされた扁平率のポテンシャルによる影響である。ある万有引力の等ポテンシャル面は V が等しい所の面となっている。ある万有引力の等ポテンシャル面が球状の対称的な質量分布に対する球体となっている。式(5-44)と(5-52)の比較は、V が r に関して万有引力加速度 g_m の動径成分の積分となっていることを表している。モデルである地球の重力と自転の両方を説明する重力ポテンシャル U を得るために、式(5-50)にある重力加速度 g の動径成分 r に関して積分をとり、そしてその結果式(5-53)を得る。

$$\begin{aligned} U = &-\frac{GM}{r} + \frac{GMa^2J_2}{2r^3}(3\sin^2\phi - 1) \\ &- \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\phi. \end{aligned} \qquad (5.53)$$

重力等ポテンシャルは、U が等しい所の面である。数メートル以内に海面が等ポテンシ

ャル面を決定する。それゆえ、海水面より上もしくは下の海抜高度が基準となるポテンシャル面より上もしくは下の距離となっている。海水面を定義する基準となる等ポテンシャル面がジオイドと呼ばれている。式(5-53)で与えられた重力ポテンシャルの二次展開と一致している。ジオイド面に対しての式を現在我々は持っている。赤道での重力ポテンシャル面の値は式(5-53)に r=a, φ=0 を代入することによってわかり、その値の結果は式(5-54)である。

$$U_0 = -\frac{GM}{a}\left(1+\frac{1}{2}J_2\right) - \frac{1}{2}a^2\omega^2. \tag{5.54}$$

地球モデルの表面を等ポテンシャル面と定義しているので、両極にある重力ポテンシャル面の値もまたU_0 になるにちがいない。式(5-53)に r=c（地球の極半径）、そしてφ= $\pm\pi/2$ を代入すると、式(5-55)を得る。

$$U_0 = -\frac{GM}{c}\left[1 - J_2\left(\frac{a}{c}\right)^2\right]. \tag{5.55}$$

このジオイドの偏平率（楕円率）は式(5-56)によって定義される。

$$f \equiv \frac{a-c}{a}. \tag{5.56}$$

偏平率は微小であり、 $f \ll 1.$ である。偏平率 f と J_2 を関連付けるために、式(5-54)と式(5-55)を等号で結び、式(5-57)を得る。

$$1 + \frac{1}{2}J_2 + \frac{1}{2}\frac{a^3\omega^2}{GM} = \frac{a}{c}\left[1 - J_2\left(\frac{a}{c}\right)^2\right]. \tag{5.57}$$

c=a(1-f)や$f \ll 1$ 、$J_2 \ll 1$; であるので、f やJ_2にある無視できる二次項や高次項を代入し、式(5-58)を得る。

$$f = \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}\frac{a^3\omega^2}{GM}. \tag{5.58}$$

式(5-45)から$a^3\omega^2/GM = 3.46139\times10^{-3}$ と $J_2 = 1.0826265\times10^{-3}$ をとることで、式(5-58)から、$f = 3.3546\times10^{-3}$ であるとわかる。この理論において高次項を無視せず残したままにすることがより正確な値を与えるのである。

$$f = 3.35281068\times10^{-3} = \frac{1}{298.257222}. \tag{5.59}$$

天体の面が等ポテンシャルである時のみ、式(5-58)が有効であると強調しなくてはならない。ジオイドモデルの形は、ほとんど球状面の形である。そして、もしr_0 がジオイドま

での距離であるならば、それは式(5-60)となる。

$$r_0 \approx a(1-\varepsilon), \tag{5.60}$$

これは、$\varepsilon \ll 1$ である。式(5-53)に $U = U_0$ や $r = r_0$ を入れ、式(5-54)を U_0 に、式(5-60)を r_0 に代入し、そして $f,\ J_2,\ a^3\omega^2/GM$ 、ε にある二次項や高次項を無視することによって、式(5-61)を得る。

$$\varepsilon = \left(\frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}\frac{a^3\omega^2}{GM}\right)\sin^2\phi. \tag{5.61}$$

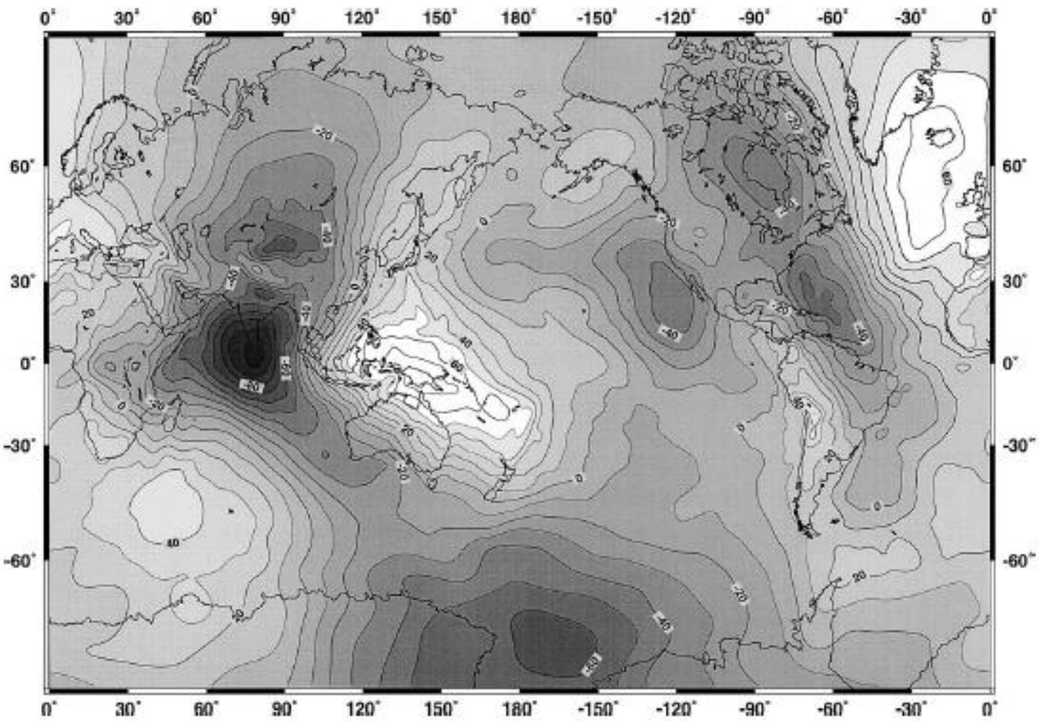

Figure 5.5 Geoid height (EGM96) above reference ellipsoid WGS84 (Lemoine et al., 1998).

式(5-61)を式(5-60)に代入することで式(5-62)や式(5-63)としてジオイドに対する方程式のおおよそのモデルを得る。

$$r_0 = a\left\{1 - \left(\frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}\frac{a^3\omega^2}{GM}\right)\sin^2\phi\right\} \tag{5.62}$$

または

$$r_0 = a(1 - f\sin^2\phi). \tag{5.63}$$

無次元量である $a^3\omega^2/GM$ は、地球に存在する物質の万有引力と比較される地球の回転のおかげで遠心加速度の非常な重要性のひとつの目安なのである。回転の影響は万有引力の影響の約 0.33%である。先立っている分析ならば、J_2 や$a^3\omega^2/GM$ における項は一次のみを考える。ジオイドの例外が測定されることに反して基準となるジオイドを与えるためには、高次項を含むことが必要である。規約によって基準となるジオイドは式(5-64)によって、赤道半径や極半径の点から定義される回転楕円体（回転した楕円面）である。

$$\frac{r_0^2\cos^2\phi}{a^2}+\frac{r_0^2\sin^2\phi}{c^2}=1. \tag{5.64}$$

回転楕円体の離心率 e は式(5-65)によって与えられる。

$$e\equiv\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)^{1/2}=(2f-f^2)^{1/2}. \tag{5.65}$$

赤道半径や偏平率の点で基準となるジオイドを表すことがよくあるやり方で、そしてその結果以下のようになる。

$$\frac{r_0^2\cos^2\phi}{a^2}+\frac{r_0^2\sin^2\phi}{a^2(1-f)^2}=1 \tag{5.66}$$

or

$$r_0=a\left[1+\frac{(2f-f^2)}{(1-f)^2}\sin^2\phi\right]^{-1/2}. \tag{5.67}$$

式(5-67)が f のべき乗で展開したり、f にある二次項や高次項を無視するのであれば、結果は式(5-63)と同じになる。$a = 6378.137\ \mathrm{km}$ や$f = 1/298.257222$ を代入した式(5-67)が基準となるジオイドを定義する。測定されたジオイドと基準となるジオイドの間の海抜高度差ΔN は、ジオイドアノマリとして言及される。ジオイドアノマリの分布図は、図(5-5)で与えられる。最大のジオイドアノマリは約 100m であり、これは赤道半径と極半径の差の 21km の約 0.5%である。正確に測定されたジオイドは、基準となるジオイドの回転楕円形であることに非常に近いのである。図 5-5 で見られる主なジオイドアノマリは地球での密度の不均質性に帰する。図(1-1)で示された表面にあるプレートの区別の比較が主要なアノマリの一部がプレートテクトニクス現象に直接に関連していることを示している。実例は、ニューギニアとチリーペルーを覆う高ジオイドである。これからは明らかにプレートの沈み込み現象と関わっている。

密度の低いリソスフェアの超過質量がジオイドの上下を引き起こす。中国を覆う負のジオイドアノマリは、インドとユーラシアプレートの間にある大陸衝突に関わっているか

もしれないし、カナダにあるハドソン橋を少し覆っているジオイドは(セクション 6-10 を参考にしなさい)後氷期の反動に関わっているかもしれない。世界最大のジオイドアノマリは、インドの南端に位置する負のジオイドアノマリであり、そしてそれは、100m もの大きさがある。このジオイドアノマリに対してなされてきた納得のいく説明は未だになく、そしてそれは表面に何も特徴がない。似たような説明のつかない負のジオイドアノマリが北アメリカの西岸に位置している。基準となるジオイドと関係のあるジオイドアノマリの定義は、ある程度恣意的である。参考値のジオイドそれ自身が地球の中にある平均的に過剰な密集となるジオイドを含んでいる。代替案は、静水ジオイドと関係のあるジオイドアノマリを定義することである。地球は、密度の観点から層となる構造をしていると仮定されるが、しかし各層は地球の自転と関係のある静水平衡の中にある。

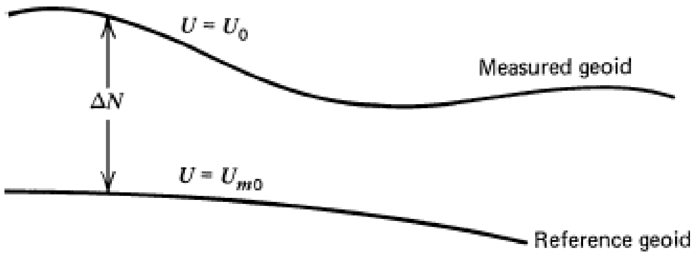

Figure 5.6 Relationship of measured and reference geoids and geoid anomaly Δ *N*.

アノマリの図は、二つのアプローチに対するはっきりとした違いであるが、主要な特徴は影響を受けないままである。測地学における主な関心事の一つは、地形学と測深学を定義することである。両方の学問は、「海水面」に関連し測定される。海水面は、U の定義に等しい等ポテンシャル面によって厳密に近似される。我々が議論してきたように、基準となる楕円体の面と関係のあるジオイドアノマリは、せいぜい 100m なのである。したがって、我々が地球楕円体によって海水面を定義するならば、この量による誤差が生じる。どの地域においても、地形学(と測深学)ならば、その地域の海水面(等ポテンシャル面)に近い面に対して関係あると測定されるにちがいない。基準となるジオイド ΔU で測定される重力場のポテンシャルにおけるこのアノマリは、そのジオイドアノマリ ΔN に直接的に関連しうる。そのポテンシャルアノマリは式(5-68)によって定義される。

$$\Delta U = U_{m0} - U_0, \tag{5.68}$$

U_{m0} は基準となるジオイドの位置において、測定されるポテンシャルであり、U_0

は式(5-44)によって、定義されるポテンシャルの基準となる値である。図(5-6)で示されたように、測定されたジオイドにおけるポテンシャルはU_0である。図から見てわかるように、$\Delta N/a \ll 1$であるので、U_0, U_{m0}そしてΔNは式(5-69)によって関連づけられる。

$$U_0 = U_{m0} + \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=r_0} \Delta N, \tag{5.69}$$

重力加速度を積分することにより、ポテンシャルを得た式(5-53)の成り立ちから思い出してほしい。したがって、式(5-69)にあるポテンシャルの動径導関数は、基準となるジオイドにおける重力加速度である。求められる正確さに対して、式(5-70)と書くことができる。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=r_0} = g_0, \tag{5.70}$$

g_0は基準となるジオイドにおいて、重力の基準となる加速度である。基準となるジオイドにおいて、測定されたポテンシャルがU_0とは異なるのとまったく同じように、基準となるジオイドにおいて、測定された重力加速度がg_0とは異なる。しかしながら、目的のために、$(\partial U/\partial r)_{r=r_0}$に対して式(5-69)において$g_0$を用いることができる。なぜならば、この値は小さな値ΔNによってかけられたものだからである。式(5-68)の中に式(5-69)、(5-70)を代入することで式(5-71)を与える。

$$\Delta U = -g_0 \Delta N. \tag{5.71}$$

局所的な質量超過が重力等ポテンシャルの外側へのワープを生み出す。すなわち、正のΔNや負のΔUである。測定されたジオイドが本質的に海水面を定義すると記してある。等ポテンシャル面からの海水面の偏向は月や太陽の潮汐、そして風や海の潮流によるものである。これらの影響は、一般的に数メートルである。式(5-62)によって、与えられたr_0に対する　表現　を式(5-50)に代入することで、そしてJ_2と$a^3\omega^2/GM$における二次項、高次項を無視することによって結果を簡略化することで、基準となるジオイド上の基準となる重力加速度は与えられる。式(5-72)がわかった。

$$g_0 = \frac{GM}{a^2}\left(1 + \frac{3}{2}J_2 \cos^2\phi\right) + a\omega^2(\sin^2\phi - \cos^2\phi). \tag{5.72}$$

重力アノマリが測定されるのとは反対に標準の正規重力を与えるために、g_0に対する式において高次項を残さなければならない。重力アノマリは、基準となるジオイド上の測定

された g の値とg_0 の差である。1980 年に国際的な同意によって、基準となる重力場は、$\mathrm{m\ s^{-2}}$ 単位でg_0をもってして定義された。

$$
\begin{aligned}
g_0 = \; & 9.7803267715(1 + 0.0052790414 \sin^2 \phi \\
& + 0.0000232718 \sin^4 \phi \\
& + 0.0000001262 \sin^6 \phi \\
& + 0.0000000007 \sin^8 \phi),
\end{aligned} \tag{5.73}
$$

この事は、1980 測地基準系(GRS)公式として知られている。式(5-73)によって与えられた、その標準的な基準となる重力は、式(5-72)における g0 や式(5-67)における r0 両方を記すのに用いられた一貫した二次近似よりもφにおいてより高次なのである。重力アノマリに対して、適した SI 単位は、mms-2 である。