5 重力

5.1 導入

地球上の質量をもつ物質にはたらく力は主に 2 つの成分がある。ひとつは地球の物体の引力によるもので、もう一方は地球の回転によるものである。重力は、引力と回転による影響を合わせたものを指す。もし地球が球対称で回転しなかったとすると、地球上における重力加速度は一定となるだろう。しかしながら、地球の回転や地形、地球内部の水平方向の密度変化のせいで、地球上の位置によって重力加速度(*acceleration of gravity*)g が変化する。主に地球の回転が、地球上の重力加速度の緯度依存性をもたらしている。回転が、赤道付近の膨らみ(*equatorial bulge*)や極の平坦さ(*polar flattening*)を生み出すことで表面を歪めていることで、赤道での重力は、極での重力に比べて訳 1000 分の 5 ほど小さい。地球は扁球の形をしている。この回転楕円体での重力場は地球での重力場をあらわしている。地球の地勢や密度の不均質性が表面重力の局所的な変動をもたらしている。これを重力異常(*gravity anomaly*)という。

地形に関わる石の質量が表面重力異常をもたらしている。しかし第 2 章で話した通り、大きな地質の特徴は低密度の地殻基盤をもつ。地形の過度な質量は正の重力アノマリをうむように、低密度の地殻基盤は負の重力異常をうみだす。1800 年代の半ば、ヒマラヤ山脈の重力は、地形の正の質量のせいで、推定されていた重力よりもかなり小さかったということがわかった。これは、地殻とマントルの境界が、大きな山地帯の下に押し下げられていることの最初の証拠であった。

地殻が厚くなる重要さの好例として、大陸にわたる正の重力異常がないことがあげられる。海底より上の大陸上昇に関わる正の質量異常は、より分厚い大陸の地殻に関わる負の質量異常によって減らされている、もしくは軽減されている(*compensated*)。厚い地殻の静力学的平衡による軽減は、表面重力異常が一次近似で 0 になることを示す。単に地殻が分厚くなるということ以外の軽減がある。たとえば、4-23 でやっているように、熱リソスフェアが厚くなることによる海底沈下である。

地質と関わる重力異常は、荷重の下にあるよく動くリソスフェアの屈曲を研究するときに使われる。リソスフェアの短波長負荷はリソスフェアを押し下げないが、長波長負荷は屈曲を起こし、モホ面を沈める原因となる。重力異常は、大きな経済的な影響をもつこともある。鉱石鉱物は、それらが見つかった場所の母岩よりも高密度であることが多いため、経済的な鉱床は、正の重力異常と関連があることが多い。主な石油の産出地は岩塩ドームの下層で見つかることが多い。岩塩ドームは、他の堆積岩より低密度なので、負の重力異常と関連があることが多い。

次の章で見るが、地球のマントル密度変化は、マントルの対流によってもたらされる。この密度変化が、地球表面の重力異常をうみだす。そのため、地球表面での重力測定は、地球内部における流れ方にかなりの制約を与える。しかし、表面重力が地球内部における密度分布固有の量をうむわけではない。地球内部の多くの、異なる密度分布は、同じ重力

異常の地表面での分布となる。つまり、重力異常の逆転は不思議な現象ではない。

5.2 回転によって歪む地球の外部の重力加速度

地球上の微小質量dmから地球外の点Pの質量m'にはたらく重力はニュートンの万有引力の法則(*Newton's law of gravitation*)によって与えられる。図 5-1 に示すように、Pからdmの方向にはたらく万有引力df_mは以下で与えられる。

$$df_m = \frac{Gm\prime dm}{b^2} \qquad (5.1)$$

ここで G は万有引力定数(*universal gravitational constant*)で、b はdmと点 P の距離である。dmの引力による P での無限小重力加速度は、単位質量当たり、m'にはたらく P の方向の力である。

(5.2)

式(5-1)と(5-2)を合わせて以下を得る。

(5.3)

地球の質量分布が正確に知られていなかったら、地球外の単位質量にはたらく地球からの万有引力は、全質量分布にわたるdg_mを足すか積分しなければいけないであろう。たとえば、地球全体の質量 M が地球の中心に集中していると仮定する。中心から距離rでの万有引力は、半径方向に内向きであり、式(5-3)によって、以下で与えられる。

(5.4)

一般的な符号規約にのっとれば、$-r$方向に向かっていてもg_mは正でとる。

次に、$\rho = \rho(r')$の半径のみの関数で与えられる密度分布をもつ球体の外の重力加速度を求める。図は 5-2 で与えている。質量分布の外の点 P での重力加速度g_mは、半径方向内向きであり、球の中心から点 P までの距離rにのみの関数となるということは、対称性を考慮することで明らかである。簡単のため、P から O に引いた線を、球座標系r, θ, ψの原線とする。球上の点r', θ', ψ'での微小質量dmによる P での重力加速度は、P からdmの方向で、式(5-3)で与えられる。P から O 方向の、この重力加速度の成分は以下。

$$\frac{G\cos\alpha dm}{b^2}$$

P での半径方向内向きの重力加速度全体は質量分布全体にわたってこの式を積分することで得られる。

(5.5)

微小質量dmは、体積要素dVと、dVでの密度$\rho(r')$との積で表される。

(5.6)

体積要素は球座標系で以下で与えられる。

(5.7)

式(5-5)で、球の質量分布全体にわたって積分すると以下。

(5.8)

ここでaはモデルである地球の半径である。式(5-8)の被積分関数の数はψ'と独立なので、ψ'についての積分は2πとなる。r', θ'についての積分を実行するために、$\cos\alpha$についての式が必要となる。余弦定理から以下のように書ける。

(5.9)

$\cos\alpha$についての式はθ'ではなくbを含んでいるので、θ'ではなくbについて積分を実行するために、式(5-8)を書き直す方がより計算しやすい。余弦定理を再び使い、$\cos\theta'$についての式を得る。

(5.10)

rとr'を定数として式(5-10)を微分すると以下。

(5.11)

式(5-9)と(5-11)を式(5-8)に代入すると、g_mについての積分表現を以下のように書ける。

(5.12)

bについて積分すると$4r'$を得るので、(5-12)は以下のようになる。

(5-13)

よってこのモデルの全体和を得る。

(5-14)

重力加速度は、

(5-15)

物体の外点で、球対称の質量分布の重力加速度はすべての質量が中心に集中している場合で計算した加速度と同じである。地球は横方向に密度変化があり、地球は回転によって歪んだ形をしており、地球より外の点での重力加速度は、地球の質量中心に向かってほぼ放射状で内向きとなっているので、式(5-15)はg_mはすばらしい一次近似を与えている。

Problem 5.1 月面上の点において、地球の質量による重力加速度と月の質量による重力加速度との比を求めよ。

地球質量の回転による歪みは、重力加速度に経度依存の項が加わる。地球の回転による赤道付近の膨らみで質量が増えていることによるものである。g_mの経度依存をみることによって、この過剰質量を定めるのに使われる。実際は、残りの重力異常が地球内部の密度異常によるものである前に、この経度依存の影響は、観測される表面重力の変化によって消去される。回転による歪みが重力加速度に与える影響を計算するのに使うモデルは図 5-3 に描いた。地球は、角速度ωの回転によって極で平らに、赤道で膨らんでいることが予想される。質量分布は回転軸のまわりに対称になっていると考えられる。回転による球対称で考え始めたので、地球の外側の点 P での重力加速度は、動径成分と接線成分どちらも持っている。動径成分はGM/r^2の和で、回転による質量分布の歪みによる項g'_rができ、接線成分g'_tは、球対称で回転していることから導き出されたもののみによる。すでに定めた符号規約に従うと、内向きであるならば、GM/r^2とg'_rはどちらも正となる。軸対称体では

ない地球に与える回転の寄与はごくわずかなので、g'_rとg'_tはGM/r^2に比べると小さい。正味の重力加速度は、

(5.16)

g'_rとg'_tの量はははGM/r^2よりも小さいので、2 次の項を無視するのがよい。よって重力加速度は、

(5.17)

式(5-17)は、重力加速度の接線成分は無視できることを表していて、回転して歪んだモデルである地球の外側の点 P での正味の重力加速度は、本質的には質量分布の中心へ放射状に内向きである。

回転によって歪んだモデルの地球での放射状の重力加速度は、式(5-5)を質量分布全体を積分することで得られる。このg_mについての式を、式(5-9)に$cos\alpha$を代入することで、

(5.18)

式(5-18)の積分に現れる３つの距離r, r', bは、図 5-3 に O,P, dmを結んだ三角形の辺である。被積分関数からbを消去し、r, r',この三角形の長さbの辺の対角βで考えることで積分を実行しやすくなる。余弦定理からこう書け、

(5.19)

それを変形することで、

(5.20)

式(5-20)を(5-18)に代入することで以下を得る。

(5.21)

式(5-21)の積分の解析的評価は不可能である。r'とbがどちらもdmの位置によって変化するのでこの積分は困難である。しかし、r'/rのべき級数で、$(r'/r)^2$までのみ項を考えた被積分関数を近似することで、この積分は扱いやすくなる。質量分布の外側の P について、$r'/r<1$ である。r'/rのべき級数展開が、重力場のa/rのべき級数と等しいことを示す。この近似で、我々の目的には十分正確な、g_mについての式が求められる。以下の式を使って、

(5.22)

(5.23)

この式は、$\varepsilon<1$ でほぼ成り立ち、以下を得る。

(5.24)

式(5-24)は質量分布の有名な物理的性質によって積分を実行できる。第 1 項は質量全体にわたるdmの積分そのもので、M となる。質量分布全体にわたる$r'cos\beta$の積分は一次モーメント分布である。座標系の原点が質量分布の中心ならば定義により 0 となる。よって式(5-24)は

(5.25)

式(5-25)の右辺第 1 項は球対称質量分布の重力加速度である。第 2 項は、扁球が回転して

いることによる作用である。式(5-24)と(5-23)の高次の項が意味を持つならば、式(5-25)の展開は、r^{-5}と、それより高次のべきr^{-1}に比例する項を含むことになる。

　式(5-25)に出てきた積分の軸対称の慣性モーメントを計算する。θ=0 で定義された z 軸か回転軸まわりの慣性モーメントを C とする。この慣性モーメントは、dmと回転軸との垂直距離の 2 乗、dm倍の質量分布全体にわたる積分である？？？この、距離の２乗は$x'^2+y'^2$なので C は以下のように書ける。

(5.26)

よって

(5.27)

(5.28)

$\theta=\pi/2, \psi=0$で定義される x 軸まわりの慣性モーメントは、

(5.29)

なぜなら

(5.30)

$\theta=\pi/2, \psi=\pi/2$で定義される y 軸まわりの慣性モーメントについても同様に、

(5.31)

回転軸もしくは z 軸まわりに軸対称な物体については A=B。軸対称性の仮定とともに、式(5-26),(5-29),(5-31)を加えると、

(5.32)

この式は、物体の慣性モーメントのついての式(5-25)にあらわれるr'^2dmの積分をあらわしている。

　次に、$r'^2sin^2\beta dm$の積分の式を導く。物体の軸対称性により、xz 平面上に、図 5-3 のように直線 OP を引いても一般性を失わない。式(5-32)により、与えられた積分は以下に書き換えられる。

(5.33)

r′$sin\beta$は OP に沿った r'の射影である。しかしこれは、

(5.34)

ここでφは緯度、あるいは OP と xy 平面がなす角である。OP は xz 平面上にあるので、y'は OP に射影がないことに注意する。式(5-34)を用いて$r'^2sin^2\beta$の積分を書き直すと、

(5.35)

軸対称なので、

(5.36)

この結果と式(5-26)より、

(5.37)

z'^2dmの積分は、式(5-26)と(5-32)を使って計算でき、

(5.38)

赤道面まわりの質量対称性より、

(5.39)

式(5-37)から(5-39)までを、式(5-35)に代入し以下を得る。

(5.40)

式(5-33)と(5-40)を合わせ、$sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1$を使うことで、

(5.41)

重力加速度は最終的に、式(5-32)と(5-41)を、式(5-25)に代入することで得られる。

(5.42)

式(5-42)は、軸対称であることからマッカラーの公式(*MacCullagh's formula*)により簡単な形になる。回転することにより扁球となっているので、軸 C まわりの慣性モーメントは、赤道の軸 A まわりの慣性モーメントより大きい。慣性モーメントを微分することで、J_2はMa^2を分母として分数で書け、それは、

(5.43)

ここで a は地球の赤道半径である。J_2を使ってg_mは、

(5.44)

地球の重力場は、人工衛星の軌道から正確に決まる。現在標準とされている値は、

(5.45)

衛星は地球の重力加速度によってのみ動くが、地球上の物体は、地球の回転による、中心から外向きの加速度の影響をうける。