5.3　遠心加速度と重力加速度

地球は角速度 ω で回転しているため、地球表面では単位重さあたり遠心加速度 g_ω の力がかかる。その力は図 5.4 に示すように回転軸に垂直な線上を半径方向外向きで P を通っており、

$$g_\omega = \omega^2 s \tag{5.46}$$

で与えられる。ここで s は P から回転軸に引いた垂線の長さである。r が P から地球中心までの半径で、ϕ が点 P の緯度であるとき、

$$s = r\cos\phi \tag{5.47}$$

$$g_\omega = \omega^2 r\cos\phi \tag{5.48}$$

となる。現在、地球の角速度は

$$\omega = 7.292115\times 10^{-5}\mathrm{rad\ s^{-1}}$$

と定められている。

地球表面の単位重さあたりにかかる重力加速度と遠心加速度は合わせて重力加速度 g となる。$g_\omega \ll g_m$ であるため、遠心加速度の動径方向を g_m に加えて g とするのは適切である。これについては (5.16) と (5.17) を見てほしい。図 5.4 に示す通り、遠心加速度の動径方向は半径外向きを向いている。半径方向内向きの加速度が正であるという慣例のもとでは、遠心加速度の動径方向は

$$g_r' = -g_\omega\cos\phi = -\omega^2 r\cos^2\phi \tag{5.49}$$

と記述される。ゆえに、重力加速度 g は (5.44) における g_m と g_r' の和であり、

$$g = \frac{GM}{r^2} - \frac{3GMa^2J_2}{2r^4}(3\sin^2\phi - 1) - \omega^2 r\cos^2\phi \tag{5.50}$$

と記述される。(5.50) では、モデル地球の表面で重心からの距離 r、緯度 ϕ の点における半径方向内向きの重力の値を表している。

5.4　重力ポテンシャルとジオイド

重力場があるため、質量 m' は引力ポテンシャル *gravitational potential*[1] を持つ。そのエネルギーは、引力で m' を無限遠点から重力場のその場所に持ってくるときに、m' に対して負の仕事をすると見なすことができる。引力ポテンシャル V は m' のポテンシャルエネルギーをその質量で割ったものである。重力場は保存されているので、単位質量あたりのポテンシャルエネルギー V はその場のどこにあるかだけに依存し、その物質がその場所に運ばれるまでに辿った道のりには依存しない。回転して歪んだ地球のモデルで V を計算するには、単位質量が無限遠点から、半径方向の道筋に沿ってモデル地球重心からの距離 r のところまで運ばれてくるところを想像すれば良い。モデルにおける重力場が単位質量に対してする負の仕事は、距離 dr を増加させたときの (5.44)[2] における単位質量あたりの力 g_m の積分値であり、次のように記述される（重力加速度と dr の増加は逆方向である）。

$$V = \int_\infty^r \left\{\frac{GM}{r'^2} - \frac{3GMa^2J_2}{2r'^4}(3\sin^2\phi - 1)\right\}dr' \tag{5.51}$$

$$V = -\frac{GM}{r} + \frac{GMa^2J_2}{2r^3}(3\sin^2\phi - 1) \tag{5.52}$$

[1] 後述の重力ポテンシャル gravity potential と区別するためこのように訳す

[2] $g_m = \frac{GM}{r^2} - \frac{3GMa^2J_2}{2r^4}(3\sin^2\phi - 1)$

V の値を求めるとき、無限遠点におけるポテンシャルエネルギーはゼロであると仮定する。地球近傍の引力ポテンシャルは負の値—つまり、地球もポテンシャルを持っているのである。(5.52) の第 1 項は質点の引力ポテンシャルである。いかなる球対称な質量分布の外にあっても、これは引力ポテンシャルである。第 2 項は地球モデルの回転運動に起因する偏平率がポテンシャルにもたらす効果を表す。引力等ポテンシャル面は V が一定になる面である。引力等ポテンシャル面は球対称な質量分布においては球状である。

(5.44) と (5.52) が似ているのは、V が重力加速度 g_m の半径方向で r に関して積分した値であるからである。モデル地球の引力と回転の両方を考慮した重力ポテンシャル *gravity potential* U を求めるには、(5.50) の重力 g を r に関して積分するとよい。こうして

$$U = -\frac{GM}{r} + \frac{GMa^2J_2}{2r^3}(3\sin^2\phi - 1) - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\phi \tag{5.53}$$

を得る。重力等ポテンシャル面は U が一定になる面のことを指す。等重力面は数 m の誤差はあるが海面によって決められている。ゆえに、海面の上昇や下降は等重力面の上昇や下降の距離の基準となる。
海面を定めているこの基準等重力面はジオイドと呼ばれる。ここからは (5.53) の重力ポテンシャルの二次展開と一致するジオイド面の記述をしていく。赤道における地表の重力ポテンシャルの値は (5.53) に $r = a$ と $\phi = 0$ を代入することで求められる。

$$U_0 = -\frac{GM}{a}(1 + \frac{1}{2}J_2) - \frac{1}{2}a^2\omega^2 \tag{5.54}$$

極における地表の重力ポテンシャルも U_0 でなければいけないが、これは我々はモデル地球の表面を等ポテンシャル面と定めたからである。(5.53) に $r = c$（地球の極半径）と $\phi = \pm\pi/2$ を代入すると

$$U_0 = -\frac{GM}{c}\left[1 - J_2\left(\frac{a}{c}\right)^2\right] \tag{5.55}$$

ジオイドの（楕円体）偏平率は

$$f \equiv \frac{a-c}{a} \tag{5.56}$$

偏平率の値は非常に小さく、$f \ll 1$ である。偏平率 f と J_2 の関係から、(5.54) と (5.55) を組み合わせて次の式を得ることができる。

$$1 + \frac{1}{2}J_2 + \frac{1}{2}\frac{a^3\omega^2}{GM} = \frac{a}{c}\left[1 - J_2\left(\frac{a}{c}\right)^2\right] \tag{5.57}$$

$c = a(1-f)$ を代入し、f や J_2 の二次および高次の項を無視すると（$f \ll 1$ および $J_2 \ll 1$ なので）、

$$f = \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}\frac{a^3\omega^2}{GM} \tag{5.58}$$

$a^3\omega^2/GM = 3.46139\times10^{-3}$ や (5.45) の $J_2 = 1.0826265\times10^{-3}$ を採用すると、(5.58) から $f = 3.3546\times10^{-3}$ であることがわかる。この議論において高次の項を含めて計算するとさらに正確な値が出る。

$$f = 3.35281068\times10^{-3} = \frac{1}{298.257222} \tag{5.59}$$

(5.58) は地球の表面が等ポテンシャル面である場合に限ってのみ有効であることを強調しておく。
ジオイドモデルの形は球面の形とほとんど同じである。つまり r_0 がジオイドからの距離の時、

$$r_0 \approx a(1-\varepsilon) \tag{5.60}$$

ただし、$\varepsilon \ll 1$ である。(5.53) で $U = U_0$、$r = r_0$ として (5.54) の U_0 と (5.60) の r_0 を代入し、$f,\ J_2,\ a^3\omega^2/GM,\ \varepsilon$ に関して二次および高次の項を無視して計算すると

$$\varepsilon = \left(\frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}\frac{a^3\omega^2}{GM}\right)\sin^2\phi \tag{5.61}$$

を得る。(5.61) を (5.60) に代入するとジオイドの近似モデル方程式が得られ、

$$r_0 = a\left\{1 - \left(\frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}\frac{a^3\omega^2}{GM}\right)\sin^2\phi\right\} \tag{5.62}$$

または

$$r_0 = a(1 - f\sin^2\phi) \tag{5.63}$$

となる。無次元量である $a^3\omega^2/GM$ を見れば、地球において物質に働く重力加速度に比べて、地球の自転による遠心加速度が相対的に重要なのかどうかがわかる。遠心力の寄与は質量の寄与の約 0.33%である。

前述の議論で、我々は J_2 と $\frac{a^3\omega^2}{GM}$ に関して一次の項についてしか考えてこなかった。ジオイド異常が計測されている点について基準ジオイド面を決めるためには、より高次の項を考慮する必要がある。慣習として、基準ジオイド面は回転楕円体であり、赤道半径と極半径によって次のように定義される。

$$\frac{r_0^2\cos^2\phi}{a^2} + \frac{r_0^2\sin^2\phi}{c^2} = 1 \tag{5.64}$$

回転楕円体の離心率 e は

$$e \equiv \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)^{1/2} = (2f - f^2)^{1/2} \tag{5.65}$$

普通、基準ジオイドは赤道半径と偏平率によって記述され、

$$\frac{r_0^2\cos^2\phi}{a^2} + \frac{r_0^2\sin^2\phi}{a^2(1-f)^2} = 1 \tag{5.66}$$

または

$$r_0 = a\left[1 + \frac{(2f - f^2)}{(1-f)^2}\sin^2\phi\right]^{-1/2} \tag{5.67}$$

と表される。(5.67) において f のべき展開をし、二次及び高次の項を無視すると (5.63) と同じになる。(5.67) で $a = 6378.137km,\ f = 1/298.257222$ とすると基準ジオイドが定義される。ジオイドの観測値と基準ジオイドの差 ΔN はジオイド異常と言われる。地球におけるジオイド異常の図は図 5.5 で示されている。ジオイド異常の最大値は約 100m であるが、これは赤道半径と極半径の差である 21km の約 0.5%である。明らかに、ジオイドの観測値は基準ジオイドである回転楕円体に非常に近い。

図 5.5 で示されている主なジオイド異常は、地球の密度が不均一であることに起因している。図 1.1 で示された地表のプレート分布と比較すると、主なジオイド異常の中にはプレートテクトニクスと直接関係のあるものもある。例えば、ニューギニアやチリ、ペルーにかけてジオイドが高くなっているが、これは明らかにプレートが沈み込む現象に関係がある。高密度の沈み込みリソスフェアは質量が非常に大きいため、ジオイドの値は高くなる。中国全体にわたる負のジオイド異常は、インドプレートとユーラシアプレートの大陸衝突と関係があるかもしれないし、ハドソン湾全体にわたる負のジオイド異常も後氷期回復 (PGR) と関連している可能性がある（6-10 章を見てほしい）。最もジオイド異常が大きいのはインドの南端における負のジオイド異常で、100m にも及ぶ。ここでは何の表層運動もなく、このジオイド異常に関して有力な説はない。同様に、北アメリカの西海岸に広がっている負のジオイド異常についても十分な説明はついていない。

基準ジオイドに対するものとして相対的に定めているためジオイド異常の定義はいくぶん独断的である。基準ジオイドそれ自体は地球内部の密度の凹凸を平均したものを採用している。その代わりとなるアプローチはジオイド異常を流体静力学との比較で定めるという方法である。地球は、密度で見て層状の構造をしているが、それぞれの層が地球の自転に対して流体静力学的につりあっている。ジオイド異常図は 2 つのアプローチによってはっきりと変わってくるが、主だった特徴はそのまま変わらない。

測地学における重要な問題の一つが地球の形を定めることと、水深を定めることである。これら 2 つは「平均海面」を定めることと関連している。平均海面は U の一定値に相当する等ポテンシャル面に近似される。議論してきたように、ジオイド異常は基準回転楕円体に対して 100m ほどであった。したがって、もし

回転楕円体によって海面を定められれば、この量は間違っているということになるだろう。ある点での地形や水深は、その点での海面（等ポテンシャル面）に近似できる面と比較して測定する必要がある。

基準ジオイド上で測定された重力場のポテンシャル異常 ΔU とジオイド異常 ΔN は直接結びつく。ポテンシャル異常は

$$\Delta U = U_{m0} - U_0 \tag{5.68}$$

で定義され、ここで U_{m0} は基準ジオイドの値をとる点で観測されたポテンシャルの値で、U_0 は (5.54) によって決まるポテンシャルの基準値である。図 5.6 で示したように、ジオイドの観測値におけるポテンシャルは U_0 である。この図から、U_0, U_{m0}, ΔN が

$$U_0 = U_{m0} + \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=r_0} \Delta N \tag{5.69}$$

という関係であることがわかる。なぜなら、$\Delta N/a \ll 1$ となるからである。(5.53) を展開して、重力加速度を積分することでポテンシャルを求めたことを思い出して欲しい。その結果、(5.69) でポテンシャルを半径で展開したものは基準ジオイドにおける重力加速度になる。正確には

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=r_0} = g_0 \tag{5.70}$$

と書くことができて、g_0 は基準ジオイドにおける重力加速度の理論値である。基準ジオイド上で測定されたポテンシャルの値が U_0 と異なるのと同じで、基準ジオイドで測定された重力加速度も g_0 とは異なる。しかし、この項は ΔN という微小な量が掛かっているため、計算する際に (5.69) において $(\partial U/\partial r)_{r=r_0}$ を g_0 とすることができる。(5.69), (5.70) を (5.68) に代入して

$$\Delta U = -g_0 \Delta N \tag{5.71}$$

を得る。局所的に質量が大きいと等ポテンシャル面が外側に曲がってしまい、ゆえに ΔN は正、ΔU は負の値になる。ジオイドの測定値は基本的には海面で決められるということに注意して欲しい。海面が等ポテンシャル面から外れる原因としては月や太陽の潮汐力、風、海流などが挙げられる。これらはたいてい数 m ほどの効果しかない。

基準ジオイド面での重力加速度の理論値は (5.62) の r_0 の式を (5.50) に代入し、J_2 と $a^3\omega^2/GM$ の二次および高次の項を無視することで以下のように求められた。

$$g_0 = \frac{GM}{a^2}\left(1 + \frac{3}{2}J_2 \cos^2\phi\right) + a\omega^2(\sin^2\phi - \cos^2\phi) \tag{5.72}$$

重力異常値は標準的な重力加速度の値と比べることで測定されるが、この値を定めるには g_0 の方程式において高次の項を求める必要がある。重力異常値とは g_0 と基準ジオイドにおける測定値 g の差である。1980 年に、重力場の標準値を次のように定めることが国際的に合意された。

$$\begin{aligned} g_0 =& 9.7803267715(1 + 0.0052790414 \sin^2\phi \\ &+ 0.0000232718 \sin^4\phi \\ &+ 0.0000001262 \sin^6\phi \\ &+ 0.0000000007 \sin^8\phi) \end{aligned} \tag{5.73}$$

ここで g_0 は $\mathrm{m/s^2}$ の次元をもつ。これは 1980 Geodetic Reference System (GRS80) として知られている。標準重力場の値 ϕ の高次の項は (5.73) で与えられるが、(5.72) の g_0 や (5.67) の r_0 の両方を詳細に記述するのに使われている二次近似よりも (5.73) で与えられる標準重力場のほうが ϕ において高次である。SI 単位系において重力異常の単位としては $\mathrm{mm/s^2}$ が適切であろう。