

5.5 慣性モーメント

(5-42)式で与えられたマッカラーの公式は、扁球惑星体の重力加速度とその主な慣性モーメントを関連づけている。その公式を使うことで、探査飛行や軌道上を周回する宇宙船によって、例えば慣性モーメントを束縛している惑星の重力場を計測することができる。慣性モーメントは惑星全体の形や内部の密度分布を反映するため、惑星の内部構造を調べるために慣性モーメントの数値を利用することができる。この目的のために、球や回転楕円体といった単純な形の物体の慣性モーメントを表すことは役に立つ。

球対象の物体の主な慣性モーメントは、物体の中心を通るすべての軸に対して質量分布が同じであるため、すべて等しく $A=B=C$ である。簡単に言うと、極の軸を $\theta=0$ として慣性モーメントを決定する。半径 a の球体について、式(5-6)と(5-7)を(5-26)に代入すると、以下の式が得られる。

$$(5.75)$$

角度 ψ' と θ' について積分すると、

$$\int_0^{2\pi} d\psi' = 2\pi$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta' d\theta' = \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta' - \cos \theta' \right]_0^\pi = \frac{3}{4}$$

よって式(5-75)は

$$(5.76)$$

一様な密度 ρ_0 をもつ球体について、(5-76)の積分から

$$(5.77)$$

を得る。球の質量は

$$(5.78)$$

であるから、慣性モーメントは

$$(5.79)$$

で与えられる。地球と月について、無次元化した極の慣性モーメントを表 5-1 に示してある。地球の $\frac{C}{Ma^2}=0.3307$ という数値は、式(5-79)によって求められる球状惑星の一様な密度の 0.4 よりもかなり小さい。この差は地球の高密度のコアと明らかに関係がある。月の $\frac{C}{Ma^2}=0.3935$ は一様な密度の惑星の数値に近いが、(半径 300km 以内の部分にある)金属の小さなコアの影響を排除できていない。

Problem 5.8

半径 a 、コアの半径 r_c 、一様な密度 ρ_m のマントルに囲まれた部分の一様な密度 ρ_c 、で与

えられる球体について考えよ。慣性モーメント C と体積 M が以下の式で与えられることを示せ。

$$(5.80)$$

$$(5.81)$$

地球のマントルと核の密度の平均値を求めよ。 $C=8.04 \times 10^{37} \text{kg m}^2$, $M=5.97 \times 10^{24} \text{kg}$, $a=6378 \text{km}$, $r_c=3486 \text{km}$

次に、

$$(5.82)$$

で与えられる密度一様な回転楕円体の主な慣性モーメントを求める。これは緯度 ϕ で表されていた式(5-64)を余緯度 θ で書き直したものである。(5-6)と(5-7)を(5-26)と(5-29)に代入することで、極と赤道での慣性モーメントが得られる。

$$(5.83)$$

$$(5.84)$$

r' についての積分の上限は式(5-82)と、軸対象の物体が $A=B$ であることから決まる。 ϕ' と r' についての積分は、分かりやすく以下で与えられる。

$$(5.85)$$

$$(5.86)$$

θ' についての積分は、変数 $x=\cos \theta'$ ($dx=-\sin \theta' d \theta'$, $\sin \theta'=((1-x^2)^{1/2})$)を用いて単純化すると

$$(5.87)$$

$$(5.88)$$

積分表より

$$(5.89)$$

$$(5.90)$$

(5-89)と(5-90)を(5-87)と(5-88)に代入すると、

$$(5.91)$$

$$(5.92)$$

これらの慣性モーメントの式から回転楕円体の J_2 を求めることができる。(5-91)と(5-92)を(5-43)の J_2 の定義に代入すると、密度一様な回転楕円体の体積の式

$$(5.93)$$

が求まり、

$$(5.94)$$

が求まる。これは $J_2 \ll 1$, $(1-c/a) \ll 1$ という仮定と一致しており、以下のように変形される。

(5.95)

式(5-95)は J_2 と密度一様な惑星体の扁平率を関連付けている。極と赤道での慣性モーメントについて、球形表面から近い層のずれには差があった。一様な密度を持たない惑星では、密度の深さ分布の球対称性からのずれは、慣性モーメントの差に影響している。

惑星の表面が等ポテンシャル面だとすると、式(5-58)は妥当である。式(5-95)をその関係式に代入すると、以下を得る。

(5.96)

(5.97)

これらは、密度一様で表面が重力の等ポテンシャル面である回転惑星体の扁平率と J_2 の推定される値である。

観測された J_2 と f の値を表 5-1 で示してある。地球の $J_2/f=0.3229$ は、式(5-95)で与えられた密度一様な物体の数値 0.4 と比較された。この差は、地球の深さによる密度の変化や、球対称な物体の深さによる密度分布のズレに原因があると考えられる。

月について、密度が一様であるという仮説は正しいと推測され、 $J_2/f=0.16$ である。しかし、 J_2 と f はどちらもとても小さい。平均の赤道半径と極半径の観測された差は $(a+b)/2 - c = 2\text{km}$ で、月の地質の差に比べると小さい。それゆえ、観測された扁平率はおそらく地殻の厚さの差に影響を受けている。月は地球に対して常に同じを向けるように潮汐的に連動しているため、月の自転は観測された J_2 の値を説明するには小さすぎる。しかし、現在の扁平率は月がもっと早く自転していた時の遺物である。弾性的であるリソスフェアの強度を十分ににして回転扁平率を維持するために、その時月のリソスフェアの厚くなったのだろう。

火星では、 $a^3\omega^2/GM=4.59\times 10^{-3}$, $J_2=1.960\times 10^{-3}$ である。式(5-58)から、力学的扁平率の推定値は 5.235×10^{-3} である。これは観測値の 6.4763×10^{-3} に近い数値である。さらにその差は、過去の速い回転速度に関係する昔の扁平率を使用していることに因ると考えられる。 J_2 と観測された扁平率の比は 0.3027 であり、これは式(5-95)から得られる密度一様な惑星の数値である 0.4 よりもかなり小さい。

Problem 5.9

C・A の慣性モーメントの差が地表付近の密度 ρ_m に、体積 M が惑星の平均密度 $\bar{\rho}$ によると仮定して、以下の式を示せ。

(5.98)

J_2 , $\bar{\rho}$, f の測定値を使って、地球の ρ_m の値を求め、得られた値について議論しなさい。

Problem 5.10

惑星の密度一様な理論を月にも適用できると仮定する。 J_2 の測定値から求められる月の自転周期を求めよ。

Problem 5.11

火星の扁平率と J_2 の測定値を使って対応する自転周期を求めよ。現在の自転周期と比較するとどうか？

5.6 地表面の重力異常

主に地表での重力異常は、地球の地殻上または内部の質量異常が主な原因である。異常な密度の地中の物体による地表面の重力異常についてまずは考えてみる。過剰な質量をもつ鉱物の堆積の集中や、質量が小さい火山性の貫入岩が例として挙げられる。物体の形や密度分布による重力異常は、式(5-3)の積分で得られる。しかし、単純な形の場合を除いてこの積分を実行することは不可能であり、数学的な方法が必要となる。

地中の物体の例として、図 5-7 で示すような半径 R で一様な重力異常 $\Delta\rho$ を持つ球を考える。地中の物体によって引き起こされる地表での重力異常を決定する時、実際の密度は物体と周囲の岩と密度の差である。式(5-15)より、中心から距離 r の位置での球の重力加速度は、

$$(5.99)$$

$\Delta\rho$ が正であれば、この加速度は球の中心を向いている。地中の物体による重力加速度は地球のそれと比べて小さいので、(5-16)と(5-17)のように、地表での重力異常 Δg は物体による地表での重力加速度の垂直成分である。図(5-7)より

$$(5.100)$$

である。 θ は図中に示してある。重力異常は下向き正で計測される。地表のある場所で、

$$(5.101)$$

x は Δg を計測した地表の場所と球の中心との水平距離、 b は球の中心の深さである。(5-99)と(5-101)を(5-100)に代入すると、以下を得る。

$$(5.102)$$

その結果の重力異常を図 5-8 にしめす。

深さの密度異常によって引き起こされる地表面での重力異常の例として、アメリカの湾岸での岩塩ドームにまたがる重力異常が挙げられる。地表面の重力異常の等高線図を図 5-9a で示す。AA で横切った部分の重力の測定結果を図 5-9b で示す。測定結果は、式(5-102)で $b=6\text{km}$, $4\pi GR^3 \Delta\rho / 3b^2 = 0.1\text{mms}^{-1}$ とし時に算出される重力異常の理論値と比較される。塩の密度が 2400kg m^{-3} で沈殿物の平均の密度が 2400kg m^{-3} であるとする、 $R=4.0\text{km}$

と分かる。これは球状の岩塩ドームの半径として妥当であるように思われる。

Problem 5.12

カナダのノースウエスト州にあるパインポイント鉱山の一番の角錐型の鉱体の重力プロフィールを図 5-10 に示してある。式(5-102)による適当なフィットが、 $b=200\text{m}$, $4\pi GR^3 \Delta\rho/3b^2 = 0.006\text{mms}^{-1}$ で得られた。重力異常が、密度 3650kg/m^3 である鉛・亜鉛によって引き起こされ、母岩の密度が 2650 kg/m^3 であるとする。球体だと仮定して、鉛・亜鉛鉱石のトン数を求めよ。

Problem 5.13

地表の下 b に埋められた、異常密度 $\Delta\rho$ 、半径 R で水平方向に無限に長い円柱の重力異常が以下の式で表せることを示せ。

$$(5.103)$$

x は地表面の測定点から円柱の軸の真上の点までの距離である。トンネルの軸が深さ 50m の位置にあるとすると、 2800kg/m^3 の岩石中を通る円形の断面が半径 10m の水平方向に長い地下のトンネルによって引き起こされる重力異常の最大値はいくらになるか？

Problem 5.14

(5-103)の $R \rightarrow 0$, $\Delta\rho \rightarrow \infty$, $\pi R^2 \Delta\rho \rightarrow \gamma$ とすることで、単位長さあたり γ の質量をもつ水平方向に無限に長い地下に埋められた線による重力異常を計算せよ。その結果は

$$(5.104)$$

となる。 x は地表の観測点から線の出どころまでの距離。式(5-104)を積分することで、過剰な質量 $\Delta\rho$ 、厚さ h を持つ地下に埋まった無限の大きさの板による重力異常は

$$(5.105)$$

になることを示せ。無限の大きさを持つ板の重力異常は密度と厚さのみに依存して、埋まっている深さにはよらない。

Problem 5.15

図 5-11 で示されているような地中の質量のある薄い板の $x=0$ での重力異常を求めるために、式(5-104)を積分せよ。板は z 方向に無限に伸びており、単位面積当たり σ の余分な密度を持つ。 $x=0$ での地表の重力異常は以下で得られる。

$$(5.106)$$

θ は図 5-11 で定義される角度。

5.7 ブーゲー重力式

前の章では異なる密度をもった地中の物体による地表面での重力異常について扱った。地表での重力異常の他の重要な原因として、地形に起因する質量による重力の影響が考えられる。一般的にこの影響は、式(5-3)の直接の積分で求めることができる。しかし、このような手順では数学的な計算が必要であり、とてもめんどろである。ほとんどすべての地形が浅い傾斜を持っているため、浅い密度異常だけではなく、地形による重力の影響について大体の式を得ることができる。

観測者のすぐ下の重力を求めるために、図 5-12 で示すような半径 R 、厚さ b の円柱上 b の距離にいる観測者について考える。観測者は、密度 ρ が、半径の座標 r ではなく垂直方向の座標 y によって決まる円柱の軸上にいる。対称であることから、体積を持つリングの厚さ dy と半径方向の長さ dr によって決まる観測者の場所での正味の重力加速度は、円柱の軸に沿って鉛直下向きである。式(5-3)より、

$$(5.107)$$

と得られる。式(5-107)での様々なファクターは、リングの体積の $2\pi r dr dy$ 、観測者とリングの部分の距離の 2 乗である $r^2 + (y+b)^2$ 、支柱の質量、リングの部分の引力の垂直成分を求めるのに必要である角度 θ のコサインである。円柱の上端から b の位置で軸上での円柱全体による重力の垂直成分は、以下である。

$$(5.108)$$

r に関して式(5-108)は容易に積分でき以下を得る。

$$(5.109)$$

ゆっくりと変化する地形や浅い密度異常に適応できるおおよその結果は、式(5-109)の $R \rightarrow \infty$ とすることで以下のように得られる。

$$(5.110)$$

これがブーゲー重力式である。これは、ある点から、地下で質量が多いかもしくは少ない点への地表面での重力異常と関係がある ($\int_0^h \rho dy$ は円盤の表面の単位面積当たりの質量)。この結果は、質量異常のある場所の上に立つ観測者の位置 b とは独立な関係である。密度によって変化する水平方向のスケールが h や b に比べて大きい限り、式(5-110)はよい近似であるといえる。

ブーゲー重力式は、地形による重力異常を求める際にとっても役に立つ。高さ h で密度 ρ_c の地形であれば、式(5-110)より重力異常は

$$(5.111)$$

となる。この結果は、式(5-105)で得た地中の無限に大きい板による重力異常についての式と一致する。 $\rho_c = 2670 \text{ kg m}^{-3}$ とすると、1km 上昇する時の重力異常は $\Delta g = 1.12 \text{ mm s}^{-2}$ となる。

ブーゲー重力式を求める際に、私たちは平面だと仮定した。地形的な修正としてこの式を

使うことは、地形の波長が地球の半径に比べて小さい場合においてのみ、良い近似を与える。

Problem 5.16

密度 2900 kg m^{-3} の海山が海底 5 km の深さにある。海山がちょうど海面に達するとして、地表面での重力異常はいくらになるか？(海山の幅と高さの比は十分に大きく、海底をそらすことはないと仮定する。)

Problem 5.17

式(5-109)を積分して、一様な密度異常 $\Delta \rho$ を持つ垂直な円柱による重力異常の、円柱上面から軸上に距離 b 離れた点での値が以下のようになることを示せ。

$$(5.112)$$

Problem 5.18

直径 10 km の火山岩栓は 0.3 mm s^{-2} の重力異常を持つ。先端が地表面にある垂直な円柱としてモデル化できると仮定して、栓の深さを求めよ。栓の密度が 3000 kg m^{-3} で、邪魔をする岩の密度を 2800 kg m^{-3} と仮定せよ。

Problem 5.19

月の重力場は、軌道を回る宇宙船の跡を追うことで求められる。図 5-13 は高度 100 km での地球側の月の面の重力異常の等値線図である。目立つ特徴は、正の異常が円形の“海”のくぼ地と一致していることである。これらは月のマスコンである。北緯 30 度、東経 17 度の「晴れの海」に関する質量異常による地表面の密度を求めよ。