

### 5. 3 遠心力による加速度と、重力による加速度

地球が角速度  $\omega$  で回っていることで、地表面にある単位質量には力が働き、それは遠心的な加速度  $g_\omega$  である。その力は、図 5-4 のように回転軸に垂直で、なおかつ P を通る直線に沿って放射状に外を向いていて、以下で与えられる。

$$g_\omega = \omega^2 s, \quad (5.46)$$

ここで  $s$  は、P から回転軸に下した垂線の長さである。  $r$  を P から地球の中心までの半径の長さ、  $\phi$  を点 P の緯度とすると、

$$s = r \cos \phi \quad (5.47)$$

さらに

$$g_\omega = \omega^2 r \cos \phi. \quad (5.48)$$

となる。現在信じられている地球の角速度の値は

$$\omega = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

である。

問 5. 2 地球の赤道における、万有引力による加速度に対する遠心力による加速度の割合を定めよ。

万有引力そして遠心力による地球表面にある物体の加速度は、合わさって重力加速度を生む。  $g_\omega \ll g_m$  なので、  $g$  を得るには  $g_m$  に遠心力による加速度のうち半径方向の成分を加えるのが適当である。これについては式 (5-16) (5-17) を見よ。図 5-4 で示されているように、遠心力の加速度の半径方向の成分は放射状に外を向いている。内向き半径方向の加速度を正とする協定に了解してもらおうと、遠心力による加速度の半径方向の成分は

$$g'_r = -g_\omega \cos \phi = -\omega^2 r \cos^2 \phi. \quad (5.49)$$

である。したがって、重力  $g$  の加速度は式 (5-44) の  $g_m$  と  $g'_r$  の和をとって

$$g = \frac{GM}{r^2} - \frac{3GMa^2 J_2}{2r^4} (3 \sin^2 \phi - 1) - \omega^2 r \cos^2 \phi. \quad (5.50)$$

式 (5-50) からは、モデル化した地球の表面にあつて、緯度  $\phi$  物体からの距離  $r$  にある点での重力の半径方向内向きの加速度が得られる。

#### 5. 4 万有引力のポテンシャルとジオイド

万有引力場の中に位置することで、物体  $m'$  は万有引力ポテンシャルエネルギーを持つことができる。そのエネルギーは、万有引力による引きつけようとする力が無限に遠い場所から万有引力場中での位置まで物体  $m'$  を運ぶことによってなされる、 $m'$  に対する負の量の仕事とみなしてよい。万有引力ポテンシャル  $V$  は、 $m'$  のエネルギーであり、その質量によって配分される。万有引力場はエネルギーが保存される場なので、単位質量あたりのポテンシャルエネルギー  $V$  は場の中での位置のみに依存し、物体がその位置に運ばれるまでの経路には依存しない。円形にゆがんだ地球モデルでの  $V$  を計算するために、物体を無限に遠いところから、そのモデルの中心より  $r$  離れたところまで放射状の経路に沿って動かすと考えてよい。そのモデルの万有引力場が物体にする負の量の仕事は、長さ  $dr$  だけ大きくなったときの式 (5-44) にある、単に質量あたりに働く力  $g_m$  の効果を足し合わせたものである。(重力加速度と増分  $dr$  には、負の相関がある) :

$$V = \int_{\infty}^r \left\{ \frac{GM}{r'^2} - \frac{3GMa^2 J_2}{2r'^4} (3\sin^2 \phi - 1) \right\} dr'$$

あるいは

$$V = -\frac{GM}{r} + \frac{GMa^2 J_2}{2r^3} (3\sin^2 \phi - 1). \quad (5.52)$$

$V$  を計算するとき、地球から無限に遠いところでのポテンシャルエネルギーを 0 としている。地球に近いところでの万有引力ポテンシャルは負である。つまり、地球はポテンシャルとしての振る舞いに長けている。式 (5-52) の第一項は、物体の万有引力ポテンシャルである。また、それはどんな球状に体系的な物体の外側に対してもあてはまる万有引力ポテンシャルである。第二項は、地球モデルが回転することで誘導される扁平率のポテンシャルへの効果である。等重力ポテンシャル面とは、 $V$  が同じ値をとるような面である。等重力ポテンシャルとは、球状に体系的な質量分布に対する球のことである。

#### 問 5. 3

- (a) 地球赤道線上における 1 kg の物体の万有引力ポテンシャルエネルギーはいくらか?
- (b) 相対速度が 0 の状態で、この物体を遠方から地球に向けて落としたとき、地球表面での速度はいくらになるか?
- (c) 得られるポテンシャルエネルギーが物体を一様に温めるように熱に変換されたとき、物体の温度はいくらになるか? ただし、物体の初期の温度を  $T_0 = 100\text{K}$ ,  $c = 1\text{ kJ/k g} \cdot \text{K}$ ,  $T_m = 1500\text{K}$ ,  $L = 40\text{ kJ/k g}$  とする。

式 (5-44) と (5-52) を比較すると、V は万有引力による加速度の半径方向成分である  $g_m$  を  $r$  に関して積分したものであることがわかる。万有引力と地球モデルの回転の両方を説明できる重力ポテンシャル  $U$  を得るためには、 $r$  に関して式 (5-50) にある重力  $g$  の加速度の半径方向成分を積分すればよい。その結果は

$$U = -\frac{GM}{r} + \frac{GMa^2 J_2}{2r^3} (3\sin^2 \phi - 1) - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \phi. \quad (5.53)$$

等重力ポテンシャル面は、 $U$  が一定となるような面のことである。数メートルの範囲で、海面により等ポテンシャル面が定義されている。したがって、海水面から上昇あるいは下降することは、基準等ポテンシャル面から上昇する、そして下降することと同じことである。

海水面を決めている基準等ポテンシャル面は、ジオイドと呼ばれている。そしてすぐに、ジオイド面に対する表現を得るが、それは式 (5-53) で与えられる、重力ポテンシャルを二次の項まで拡張したものと一致する。赤道での表面重力ポテンシャルの値は、式 (5-53) に  $r = a$ 、 $\phi = 0$  を代入することで得られ、その値は

$$U_0 = -\frac{GM}{a} \left(1 + \frac{1}{2} J_2\right) - \frac{1}{2} a^2 \omega^2. \quad (5.54)$$

である。極での表面重力ポテンシャルも、必ず  $U_0$  になる。なぜなら、地球モデルの表面を等ポテンシャル面と定義しているからだ。ここで式 (5-53) に  $r = c$  (地球の極半径) そして  $\phi = \pm \pi/2$  を代入すると

$$U_0 = -\frac{GM}{c} \left[1 - J_2 \left(\frac{a}{c}\right)^2\right]. \quad (5.55)$$

を得る。ジオイドの扁平率 (楕円率) は以下のように定義されている。

$$f \equiv \frac{a - c}{a}. \quad (5.56)$$

扁平率は非常に小さい。つまり、 $f \ll 1$  としてよい。扁平率を  $J_2$  の関数で表すために、式 (5-54) と (5-55) をイコールで結んで以下を得る。

$$1 + \frac{1}{2} J_2 + \frac{1}{2} \frac{a^3 \omega^2}{GM} = \frac{a}{c} \left[1 - J_2 \left(\frac{a}{c}\right)^2\right]. \quad (5.57)$$

$c = a(1 - f)$  を代入し、さらに  $f \ll 1$ 、 $J_2 \ll 1$  より二次以上の項を無視すると

$$f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} \frac{a^3 \omega^2}{GM}. \quad (5.58)$$

となることがわかる。 $a^3 \omega^2 / GM = 3.46139 \times 10^{-3}$ 、そして式 (5-45) より  $J_2 = 1.0826265 \times 10^{-3}$  の値を用いると、式 (5-58) より  $f = 3.33546 \times 10^{-3}$  だとわかる。理論の中で高次の項を残しておく、より正確な値が得られ、

$$f = 3.35281068 \times 10^{-3} = \frac{1}{298.257222}. \quad (5.59)$$

となる。式(5-58)は、地球自体の表面が等ポテンシャルである場合においてのみ有効であるということは強調しておこう。

ジオイドモデルの形は、ほぼ球面である。つまり、 $r_0$ をジオイドまでの距離とすると、 $\varepsilon \ll 1$ を用いて

$$r_0 \approx a(1 - \varepsilon), \quad (5.60)$$

としてよい。式(5-53)において $U=U_0$ 、 $r=r_0$ とし、 $U_0$ には式(5-54)を、 $r_0$ には式(5-60)を代入する。そして $f$ 、 $J_2$ 、 $a^3\omega^2/GM$ 、 $\omega$ に関する二次以上の項を無視すると、以下を得る。

$$\varepsilon = \left( \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2} \frac{a^3\omega^2}{GM} \right) \sin^2 \phi. \quad (5.61)$$

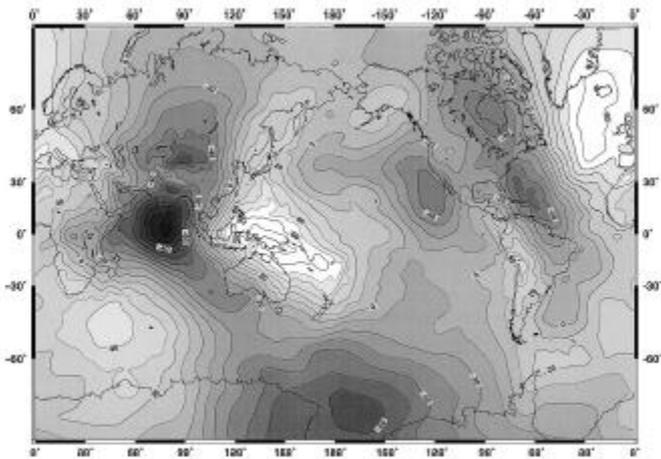


Figure 5.5 Geoid height (EGM96) above reference ellipsoid WGS84 (Lemoine et al., 1998).

式(5-60)に式(5-61)を代入することで、だいたいのジオイドに関するモデル式が以下のように得られる。

$$r_0 = a \left\{ 1 - \left( \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2} \frac{a^3\omega^2}{GM} \right) \sin^2 \phi \right\} \quad (5.62)$$

あるいは

$$r_0 = a(1 - f \sin^2 \phi). \quad (5.63)$$

無次元量 $a^3\omega^2/GM$ というものさしで、地球内の質量による重力的な引力と較べて、地球の回転による遠心力的な加速度の相対的な重要度を測ることができる。回転による寄与は、質量による寄与のおよそ0.33%である。

これまでの分析では、 $J_2$ と $a^3 \omega^2 / GM$ について一次の項のみ考えた。ジオイド異常を測れるような基準ジオイドを提供するために、高次の項を含めることが必要である。協定では、基準ジオイドは赤道半径と極半径に関して

$$\frac{r_0^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{r_0^2 \sin^2 \phi}{c^2} = 1. \quad (5.64)$$

で定義される回転楕円体（回転する楕円）としている。回転楕円体の離心率  $e$  は

$$e \equiv \left( \frac{a^2 - c^2}{a^2} \right)^{1/2} = (2f - f^2)^{1/2}. \quad (5.65)$$

で与えられる。赤道半径と扁平率の観点で基準ジオイドを表現することはよくある習慣で、その結果

$$\frac{r_0^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{r_0^2 \sin^2 \phi}{a^2(1-f)^2} = 1 \quad (5.66)$$

または

$$r_0 = a \left[ 1 + \frac{(2f - f^2)}{(1-f)^2} \sin^2 \phi \right]^{-1/2}. \quad (5.67)$$

となる。ここで、式(5-67)を  $f$  に関して展開し、二次以上の項を無視すればその結果は式(5-63)と一致する。式(6-67)に  $a = 6378.137$ ,  $f = 1/298.257222$  を代入したものが基準ジオイドの定義となっている。

測定されたジオイドと、基準ジオイドの高さの違い  $\Delta N$  のことをジオイド異常という。ジオイド異常の地図は図5-5で与えられる。最大ジオイド異常は100m前後だが、これは赤道半径と極半径の差21kmと較べるとおよそ0.5%にすぎない。明らかに、測定されたジオイドは基準ジオイドの球形を持っていると言っても間違いではない。

図5-5で表されている主なジオイド異常の原因は、地球内部の密度が均一でないことだと考えられる。図1-1で表されている表面プレートの分布と較べてみると、主な異常のうちいくつかは、プレートテクトニクス現象と直接関連付けられることがわかる。例として、ニューギニアやチリーペルー間近辺のジオイド高水準域が挙げられる。これは明らかにプレートの沈み込みと関係がある。リソスフェアを差し引いても、高密度な部分の質量が余計にあることで、ジオイドが上昇してしまっている。中国近辺の負のジオイド異常は、おそらくインドとユーラシアプレートの大陸衝突に原因があり、カナダのハドソン湾近辺のジオイドの低さは、おそらく氷河期以降の反動によるものだろう(6-10章を見よ)。最も大きいジオイド異常は、インド南端の負のジオイド異常で、これは100mの大きさがある。このジオイド異常には満足な説明ができておらず、うわべの表現すらない。

同じように、説明のつかない負のジオイド異常が北アメリカのウエストコーストにも存在する。

基準ジオイドとの相対的なジオイド異常の定義は、いくぶん恣意的なものである。基準ジオイドそれ自体は、地球内部の密度異常を平均したものが含まれている。代替案として、静水圧ジオイドとの相対的なジオイド異常と定義するというものがある。地球は、密度の観点で層構造を持っていると推測できるが、どの層も地球の回転と関連して静水圧平衡状態にある。異常地図は2つの方法でかなり異なってしまうが、主な特徴は変わらない。

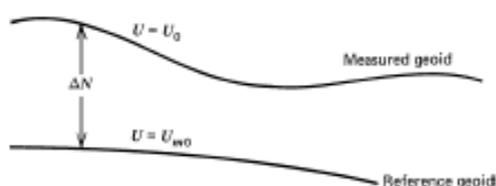


Figure 5.6 Relationship of measured and reference geoids and geoid anomaly  $\Delta N$ .

測地学における主な関心事の一つは、地形調査と推進測量を明確にすることである。どちらも“海水面”と相対的に測定されている。海水面はUが一定値をとることと一致する、等ポテンシャル面によってほぼ近似されている。今まで議論してきたように、基準回転楕円体面との相対的なジオイド異常は大きくても100mにしかない。このように、海水面を包括的な回転楕円体だと定義したところで、この量の誤差でしかない。どんな場所で地形調査（そして推進測量）しようとも、その場所の海水面（等ポテンシャル面）で近似した面と相対的に測定されるに違いない。

問5. 4 数千kmの垂直スケールの巨大ジオイド異常が存在し、そこには移動しないマントル起源があるとしよう。大陸引きずりが原因で、大陸のパッシブマージンが異常部を通過する。この縁がジオイド異常部を通過することで、海面に大きな変化は生じるか？自分の考えを説明せよ。

基準ジオイドをもとに測定された、重力場中のポテンシャルの異常 $\Delta U$ は、直接的にジオイド異常 $\Delta N$ と関係しうる。ポテンシャル異常は

$$\Delta U = U_{m0} - U_0, \quad (5.68)$$

で定義される。ここで、 $U_{m0}$ は基準ジオイドの場所で測定されたポテンシャルであり、 $U_0$ は式(5-53)で定義されたポテンシャルの基準値である。図5-6で示されているよ

うに、測定されたジオイドでのポテンシャルは $U_0$ である。その図からは、 $\Delta N \ll 1$ より、 $U_0$ 、 $U_{m0}$ 、そして $\Delta N$ が

$$U_0 = U_{m0} + \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=r_0} \Delta N, \quad (5.69)$$

の関係にあることが見てとれる。式(5-53)がどのように導かれたかを考えて、重力の加速度を積分することでポテンシャルを得ていたことを思い出せ。このように、式(5-69)でのポテンシャルの半径方向微分は、基準ジオイドでの重力の加速度である。正確に書けということで、

$$\left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=r_0} = g_0, \quad (5.70)$$

と書いてよく、ここに $g_0$ は基準ジオイドでの基準重力加速度である。基準ジオイドで測定されたポテンシャルが $U_0$ と異なるのと同様に、基準ジオイドで測定された重力加速度も $g_0$ と異なっている。しかし、目的を考えれば、式(5-69)において $(\partial U / \partial r)_{r=r_0}$ の値として $g_0$ を用いてよい。というのも、この項は微小量 $\Delta N$ との積になっているからである。式(5-69)と(5-70)を式(5-68)に代入することで、

$$\Delta U = -g_0 \Delta N. \quad (5.71)$$

が得られる。局地的に質量が多ければ等重力ポテンシャルに歪みが生じ、それゆえに正の $\Delta N$ 、そして負の $\Delta U$ が生じる。測定されたジオイドは、本質的に海面を定義している。当ポテンシャル面から海面がずれていれば、それは月と太陽の潮汐、風とさらに海流が原因である。これらの効果は一般的には数mである。

基準ジオイドにおける基準重力加速度は、式(5-62)で与えられている $r_0$ の式を式(5-50)に代入し、 $J_2$ と $a^3 \omega^2 / GM$ について二次以上の項を無視することで結果を単純化すればわかる。

$$g_0 = \frac{GM}{a^2} \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 \cos^2 \phi \right) + a \omega^2 (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi). \quad (5.72)$$

となることだろう。重力異常を測る尺度となるような、標準的な基準重力加速度を得るためには、 $g_0$ に関する式の中で高次の項も残しておかなければならない。重力異常というのは、基準ジオイドで測定された $g$ の値と $g_0$ の値の差である。1980年での国際的な協定で、基準重力場は以下のように定義された。

$$\begin{aligned} g_0 = & 9.7803267715(1 + 0.0052790414 \sin^2 \phi \\ & + 0.0000232718 \sin^4 \phi \\ & + 0.0000001262 \sin^6 \phi \\ & + 0.0000000007 \sin^8 \phi), \end{aligned} \quad (5.73)$$

ここで、 $g_0$ の単位は $\text{m s}^{-2}$ である。これは、1980測地基準系(GRS)公式として知られている。式(5-73)で与えられる標準基準重力場は、式(5-72)における $g_0$ や、式(5-67)における $r_0$ の両者を明記するのに用いられた調和二次近似よりも、 $\phi$ に関して高次の項を持っている。重力異常に適切なSI単位は $\text{mm s}^{-2}$ である。

問5.5 GRS80と式(5-72)で与えられる二次近似式を用いて、赤道と両極での重力加速度の値を定めよ。

問5.6 二次以上の項を無視することで、基準ジオイドでの重力場が、赤道での重力場 $g_e$ を用いて

$$g_0 = g_e \left[ 1 + \left( 2 \frac{\omega^2 a^3}{GM} - \frac{3}{2} J_2 \right) \sin^2 \phi \right]. \quad (5.74)$$

と表されることを示せ。

問5.7 赤道において、ジオイドより $b$ だけ高い位置での重力加速度の値はいくらか？(ただし、 $b \ll a$ とする)

田中