

5.5 慣性モーメント

式(5-42)で与えられたマカラの式は扁平惑星体の万有引力による加速度と第一慣性モーメントを関係させる。そのため、この式を、例えば惑星の慣性モーメントを制限するために、接近通過や軌道宇宙船による惑星の重力場測定とともに使うことが出来る。慣性モーメントが惑星全体の形と内部の密度分布を反映するために、モーメントの値を惑星の内部構造を知るのに使うことが出来る。この目的のために、球や回転楕円体といった簡単な物体の慣性モーメントの表式を持つことは有効である。

球対象な物体の第一慣性モーメントはすべて等しい、 $A = B = C$ 、なぜなら質量分布が物体の中心を通る任意の軸に対して等しいからだ。簡単のため、 $\theta = 0$ で定義される極軸まわりの慣性モーメントを求めよう。半径 a の球体にたいして、式(5-6)と(5-7)を式(5-26)に代入すると

$$C = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \rho(r') r'^4 \sin^3 \theta' dr' d\theta' d\psi'. \quad (5.75)$$

が得られる。 ψ' と θ' の積分は

$$\int_0^{2\pi} d\psi' = 2\pi$$

と

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta' d\theta' = \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta' - \cos \theta' \right]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

であるから、式(5-75)は

$$C = \frac{8\pi}{3} \int_0^a \rho(r') r'^4 dr'. \quad (5.76)$$

となる。密度 ρ_0 で一様の球体では式(5-76)の積分は

$$C = \frac{8\pi}{15} \rho_0 a^5. \quad (5.77)$$

となる。球の質量が

$$M = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0, \quad (5.78)$$

なので、慣性モーメントは

$$C = \frac{2}{5} M a^2. \quad (5.79)$$

とも与えられる。

Table 5.1 *Values of the Dimensionless Polar Moment of Inertia, J_2 , and the Polar Flattening for the Earth, Moon, Mars, and Venus*

	Earth	Moon	Mars	Venus
C/Ma^2	0.3307007	0.3935	0.366	0.33
$J_2 \equiv \frac{1}{Ma^2} \left(C - \frac{A+B}{2} \right)$	1.0826265×10^{-3}	2.037×10^{-4}	1.96045×10^{-3}	4.458×10^{-6}
$f \equiv \frac{2}{(a+b)} \left(\frac{a+b}{2} - c \right)$	$3.35281068 \times 10^{-3}$	1.247×10^{-3}	6.4763×10^{-3}	—

地球と月の無次元の極慣性モーメントを表 5-1 に示す。地球の $C/Ma^2 = 0.3307$ という値は、密度一様な球体の惑星としたときに式(5-79)によって得られる 0.4 よりもかなり小さい。この違いはあきらかに高密度である地球の核に関連する。月の $C/Ma^2 = 0.3935$ という値は密度一様な値に近い、しかし（半径 300km 以下の）小さい鉄の核を明らかにしない。

問 5.8

密度一様な半径 a 、核の半径が r_c 、核の密度一定 ρ_c マントル密度 ρ_m の球体を考える。慣性モーメント C と質量 M が

$$C = \frac{8\pi}{15}[\rho_c r_c^5 + \rho_m(a^5 - r_c^5)] \quad (5.80)$$

$$M = \frac{4\pi}{3}[\rho_c r_c^3 + \rho_m(a^3 - r_c^3)]. \quad (5.81)$$

で与えられることを示せ。地球のマントルと核の密度の値を求めよ。ただし $C = 8.04 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$ 、 $M = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ 、 $a = 6378 \text{ km}$ 、 $r_c = 3486 \text{ km}$ とする。

次に

$$r_0 = \frac{ac}{(a^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}. \quad (5.82)$$

によって定義される回転楕円体の第一慣性モーメントを明らかにする。

これは式(5-64)で緯度 ϕ を余緯度 θ に置換したものである。式(5-6)と(5-7)を式(5-26)と(5-29)に代入することで極と赤道まわりの慣性モーメントは

$$C = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \int_0^\pi r'^4 \sin^3 \theta' d\theta' dr' d\psi' \quad (5.83)$$

$$A = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \int_0^\pi r'^4 \sin \theta' \times (\sin^2 \theta' \sin^2 \psi' + \cos^2 \theta') d\theta' dr' d\psi', \quad (5.84)$$

と書ける。 r' の積分区間の上限は式(5-82)と軸対象な物体では $B = A$ であることより与えられる。 ψ' と r' の積分を行うと

$$C = \frac{2}{5}\pi\rho a^5 c^5 \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta' d\theta'}{(a^2 \cos^2 \theta' + c^2 \sin^2 \theta')^{5/2}} \quad (5.85)$$

$$A = \frac{1}{2}C + \frac{2}{5}\pi\rho a^5 c^5 \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta'}{(a^2 \cos^2 \theta' + c^2 \sin^2 \theta')^{5/2}}. \quad (5.86)$$

となる。 θ' の積分は $x = \cos \theta'$ ($dx = -\sin \theta' d\theta'$, $\sin \theta' = (1 - x^2)^{1/2}$)と置換することで容易になり、

$$C = \frac{2}{5}\pi\rho a^5 c^5 \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2) dx}{[c^2 + (a^2 - c^2)x^2]^{5/2}} \quad (5.87)$$

$$A = \frac{1}{2}C + \frac{2}{5}\pi\rho a^5 c^5 \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{[c^2 + (a^2 - c^2)x^2]^{5/2}}. \quad (5.88)$$

となる。包括的な積分表から

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\{c^2 + (a^2 - c^2)x^2\}^{5/2}} = \frac{2}{3} \frac{(2a^2 + c^2)}{c^4 a^3} \quad (5.89)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\{c^2 + (a^2 - c^2)x^2\}^{5/2}} = \frac{2}{3} \frac{1}{c^2 a^3}. \quad (5.90)$$

である。式(5-89)と(5-90)を式(5-87)と(5-88)に代入して

$$C = \frac{8}{15}\pi\rho a^4 c \quad (5.91)$$

$$A = \frac{4}{15}\pi\rho a^2 c(a^2 + c^2). \quad (5.92)$$

を得る。これらの慣性モーメントの表式は回転楕円体の J_2 を決定するのに使用できる。密度一様の回転楕円体の質量の式

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho a^2 c, \quad (5.93)$$

を用いつつ、式(5-91)と(5-92)を式(5-43)で与えられた J_2 の定義式に代入することで、

$$J_2 = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right). \quad (5.94)$$

を得る。 $J_2 \ll 1$ 及び $(1 - c/a) \ll 1$ という以前の仮定と同様に

$$J_2 = \frac{2}{5} \left(1 - \frac{c}{a}\right) = \frac{2f}{5}. \quad (5.95)$$

と近似出来る。式(5-95)は J_2 と密度一様の惑星の扁平率との関係を示す。表面に近い層での球体からのずれはこのような物体の極の慣性モーメントと赤道の慣性モーメントの違いを生む。密度が一様でない惑星では、深さ方向の密度分布の球対称からのずれも慣性モーメントの違いを生じさせる。

もし惑星表面が等ポテンシャル面でもあるならば、式(5-58)が有効である。式(5-95)を代入して

$$f = \frac{5 a^3 \omega^2}{4 GM} \quad (5.96)$$

または

$$J_2 = \frac{1 a^3 \omega^2}{2 GM}. \quad (5.97)$$

が得られる。これらはその表面が重力の等ポテンシャル面である密度一様で自転する惑星体の扁平率と J_2 の値である。

観測された J_2 と f の値を表 5-1 に示す。地球の $J_2/f = 0.3229$ は式(5-95)で得られる密度一様の物体の 0.4 という値と比較される。値の違いは地球の深さ方向の密度変化と深さ方向の球対称からの密度分布のずれによるものでありうる。

月については密度一様な場合の理論が有効だと期待される、 $J_2/f = 0.16$ 。しかし、 J_2 と f 両方ともに極めて小さい。観測された平均の赤道半径と極半径の違いは $(a + b)/2 - c = 2\text{km}$ であり、月面地形の変化と比べても小さい。それゆえ観測された扁平率は地殻の厚さの変動の影響を受けているだろう。月は地球と干満のある状態で連結しておりそのため月の同じ面だけが地球を向いているので、月の自転は観測された J_2 の値を説明するのには小さすぎる。しかし、現在の扁平率は月がより早く自転していた時の名残であろう。弾性リソスフェアの強度が回転扁平を保持するのに十分なほどその当時月のリソスフェアは十分に厚かったのだろう。

火星については $a^3\omega^2/GM = 4.59 \times 10^{-3}$ で $J_2 = 1.960 \times 10^{-3}$ である。式(5-58)より予想される力学的な扁平率の値は 5.235×10^{-3} である。これは観測された扁平率 6.4763×10^{-3} と同等である。ここでも、値の違いは過去のより大きな自転速度と関連する以前の扁平率が保存されていることによるものだろう。 J_2 と観測された扁平率の比は 0.3027 である。これもまた式(5-95)で得られる密度一様の惑星の 0.4 という値より相当小さい。

問 5.9 慣性モーメントの差 $C - A$ は表面付近の密度 ρ_m と関係し、質量 M は惑星の平均密度 $\bar{\rho}$ と関連するとして、

$$J_2 = \frac{2}{5} \frac{\rho_m}{\bar{\rho}} f. \quad (5.98)$$

を示せ。地球の ρ_m の値を $J_2, \bar{\rho}, f$ の観測値から求めよ。得られた値について議論せよ。

問 5.10 惑星体の慣性モーメントの密度一様な場合の理論は月に対しても適用できる。与えられている J_2 の測定値より月の自転周期を求めよ。

問 5.11 扁平率と J_2 の値には観測値を用い、対応する自転の周期を求めよ。現在の自転周期と比較するとどうであるか。

5.6 表面重力異常

地球の地殻上と地殻内部での質量異常は表面重力異常の主要な源である。初めに特異な密度の埋没している物体による表面重力異常を考えよう。普通それに関連して過剰質量をもたらす局所的な鉱物の鉱床やそれに関連する質量の欠如をもたらす火成岩の貫入といった例がある。式(5-3)を全体積にわたって積分すれば任意の形と密度分布をした物体による重

力異常を得ることが出来る。しかし必要とされる積分を実行するのは最も簡単な形を除き一般には不可能であり、通常多くの手法が必要である。

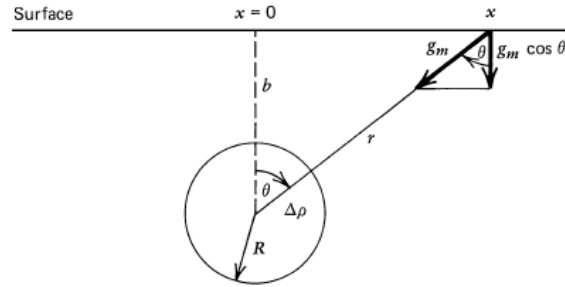


Figure 5.7 The gravitational attraction due to a sphere of anomalous density $\Delta\rho$ and radius R buried at a depth b beneath the surface.

地下の物体の具体例として、図 5-7 で示されるような、半径 R 一様な密度異常 $\Delta\rho$ の地下の球体を考える。地中の物体による表面重力異常を決定するときの実効的な密度は物体と周りの岩石との密度の差であるということは強調すべき点だ。式(5-15)から、球状の質量異常による中心からの距離 $r(r > R)$ での万有引力による加速度は

$$g_m = \frac{4\pi GR^3 \Delta\rho}{3r^2}. \quad (5.99)$$

である。この加速度はもし $\Delta\rho$ が正ならば球の中心を向いている。(図 5-7 を見よ) 地中の物体による万有引力による加速度は地球の万有引力による加速度と比べて小さいので、表面重力異常 Δg は物体による表面重力異常の鉛直成分のみからなる (式(5-16)と(5-17)を参照せよ)。図 5-7 より、図中で示されている θ を用いて、

$$\Delta g \equiv g_m \cos \theta, \quad (5.100)$$

と書ける。重力異常は正の方向に測られた。 Δg を観測した地表の地点と球の中心との水平距離を x 、球の中心の深さを b とすると、地表の一点にたいして、

$$\cos \theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{(x^2 + b^2)^{1/2}}, \quad (5.101)$$

である。式(5-99)と(5-101)を式(5-100)に代入することで

$$\Delta g = \frac{4\pi GR^3 \Delta\rho b}{3r^3} = \frac{4\pi GR^3 \Delta\rho}{3} \frac{b}{(x^2 + b^2)^{3/2}}. \quad (5.102)$$

を得る。得られた重力異常を図 5-8 に示す。

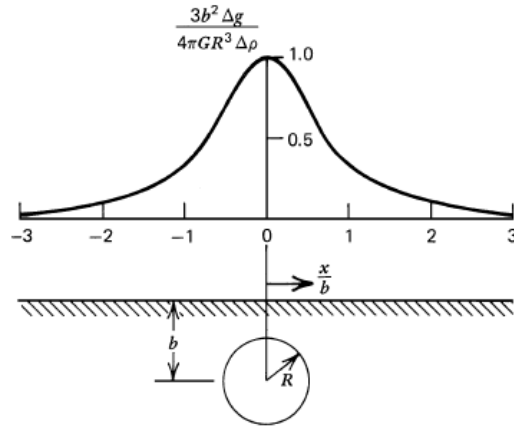


Figure 5.8 The surface gravity anomaly resulting from a spherical body of radius R whose center is at a depth b , as in Equation (5-102).

地下の密度異常による表面重力異常の具体例はアメリカ、メキシコ湾沿岸沖の岩塩のドームによる重力異常である。表面重力異常の等値線図が図 5-9a に与えられている。横断面 AA 上での重力の測定値が図 5-9b に示されている。測定値は $b = 6\text{km}$ 、 $4\pi GR^3 \Delta\rho / 3b^2 = 0.1\text{mm s}^{-2}$ としたときに式(5-102)から計算される理論上の重力異常と比較される。塩の密度が 2000kg m^{-3} であり、平均密度が 2400 kg m^{-3} と仮定すると $R=4.0\text{km}$ だとわかる。これは球相当の岩塩ドームの半径として合理的だと思われる。

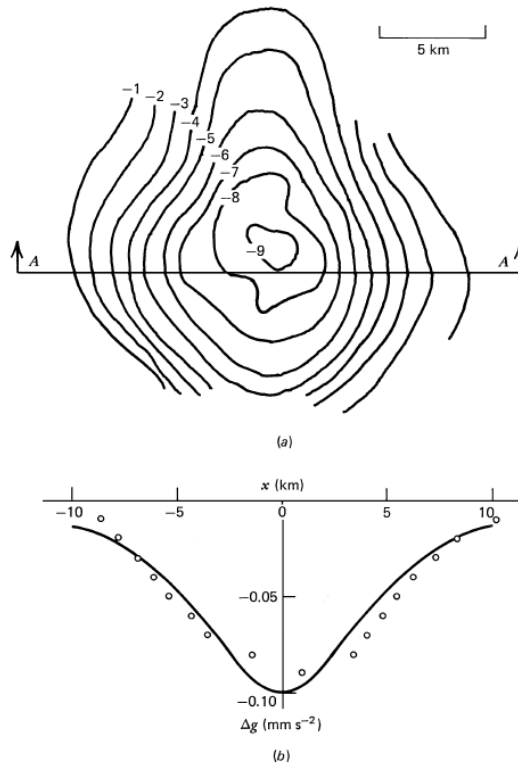


Figure 5.9 (a) Contour map (0.01 mm s^{-2} contours) of the surface gravity anomaly over a salt dome 125 miles southeast of Galveston, Texas, at the outer edge of the continental shelf (Nettleton, 1957). (b) Measurements of gravity on section AA from (a) compared with a theoretical fit based on Equation (5-102).

問 5.12 カナダノースウエスト準州のパインポイント付近のピラミッド No.1 鉱石体での重力のプロファイルが図 5-10 で示されている。 $b = 200 \text{ m}$ および $4\pi GR^3\Delta\rho/3b^2 = 0.006 \text{ mm s}^{-2}$ として式(5-102)より妥当なフィッティングを得る。密度が 3650 kg m^{-3} である鉛 - 亜鉛鉱石によって重力異常が起こされ、またその土地の岩石の密度は 2650 kg m^{-3} であるとする。鉛 - 亜鉛鉱石が球体だとしてそのトン数を見積もれ。この鉱石体の掘削によって定められたトン数は 920 万トンである。

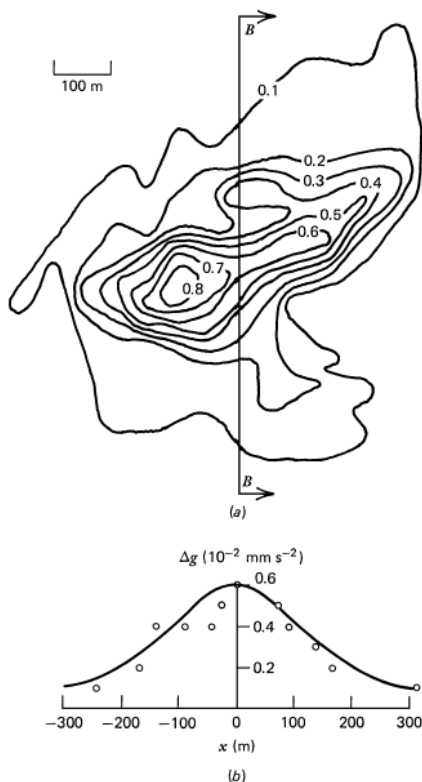


Figure 5.10 (a) Contour map ($10^{-2} \text{ mm s}^{-2}$ contours) of the surface gravity anomaly over the Pyramid No. 1 ore body (Seigel et al., 1968). (b) Gravity measurements on section BB from (a) compared with a theoretical fit based on Equation (5-102).

問 5.13 表面からの深さ b にある密度異常 $\Delta\rho$ 、半径 R の水平方向に無限に長い円柱による重力異常が

$$\Delta g = \frac{2\pi GR^2\Delta\rho b}{(x^2 + b^2)}, \quad (5.103)$$

で表されることを示せ、ただし x は地表の観測点から円柱の軸の真上の点までの水平距離である。長い水平方向の地下の円形断面トンネルによる重力異常の最大値はどの程度か、ただしトンネルは地下 50m の地点にあり、半径は 10m で密度 2800 kg m^{-3} の岩石を通っている。

問 5.14 単位長さあたり γ の質量超過がある地中の無限に長い水平な線による重力

異常を式(5-103)の極限を $R \rightarrow 0$ と $\Delta\rho \rightarrow \infty$ より $\pi R^2\rho \rightarrow \gamma$ として計算せよ。結果は

$$\Delta g = \frac{2G\gamma b}{x^2 + b^2}, \quad (5.104)$$

となる、 x は地表の観測点から線源の真上の点までの水平距離である。式(5-104)を積分することで、地中の厚さ h 、超過質量 $\Delta\rho$ の無限平板による重力異常が

$$\Delta g = 2\pi Gh\Delta\rho. \quad (5.105)$$

によって与えられることを示せ。無限平板による異常はその密度と厚さのみに依存し、深さには依存しないことに注意せよ。

問 5.15 図 5-11 に示される地中の質量をもつシートによる、 $x=0$ における、重力異常を求めるため、式(5-104)を積分せよ。シートは z 方向に無限に広がっていて、単位体積あたりの過剰質量 σ をもつ。図 5-11 のように θ を定義したときに、 $x=0$ での表面重力異常は

$$\Delta g = 2G\sigma\theta, \quad (5.106)$$

によって与えられる。

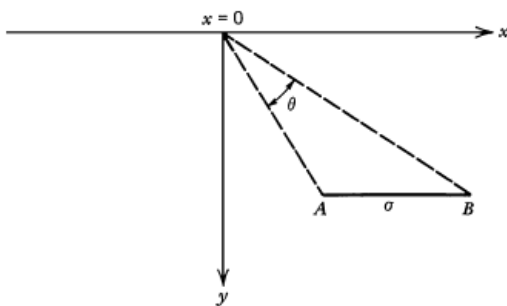


Figure 5.11 A buried sheet AB of excess mass σ per unit area.