

Figure 5.12 Coordinate system used to determine the gravitational attraction of a circular disk at a point along its axis.

### 5.7 ブーゲー重力式

前のセクションでは、埋没した特異な密度の物体に起因する表面の重力異常に着目した。もう一つの表面の重力異常の重要な要因は地形に多大に関連した万有引力の影響である。一般に、この影響は式(5-3)の直接積分で調べることができる。しかし、そのような手法は通常、数値計算を必要とし、とても面倒である。ほとんどすべての地形が相対的に緩やかな斜面を持つことから、地形やそのほかの緩やかな密度異常による引力の影響の近似式を導き出すことができる。

観測者のすぐ真下での万有引力を決定するために、図5-2で例示されるような、半径R厚さhの円筒形のディスクの上面から上に距離bの位置にある観測者を考える。観測者は、密度 $\rho$ が放射座標rではなく、垂直座標yに依存するディスクの軸上に存在する( $\rho = \rho(y)$ )。対称性により、垂直方向の厚さdyおよび放射方向の厚さdrの輪による観測者の位置の正味の万有引力は、円柱軸に沿って垂直にした方向を向く。式(5-3)によると、それは以下の式によって与えられる。

$$dg_y = \frac{(2\pi r dr dy)(\rho)G}{[r^2 + (y + b)^2]} \left\{ \frac{y + b}{[r^2 + (y + b)^2]^{1/2}} \right\}. \quad (5.107)$$

式(5-107)の諸要因は、輪の体積である $2\pi r dr dy$ 、観測者と輪の要素との距離の二乗である $r^2 + (y + b)^2$ 、そして中括弧の中身の量である輪の要素による万有引力の垂直要素を得るた

めに必要な角度  $\theta$  (図5-12参照)のコサインである。したがって、その上面から距離  $b$  だけ離れたディスクの軸上のディスク全体による万有引力の垂直成分は以下のように与えられる。

$$g_y = 2\pi G \int_0^h \int_0^R \frac{(b+y)r\rho(y) dr dy}{[r^2 + (b+y)^2]^{3/2}}. \quad (5.108)$$

また、 $r$ に関して式(5-108)を容易に積分することができ、

$$g_y = 2\pi G \int_0^h \rho(y) \left(1 - \frac{b+y}{[R^2 + (b+y)^2]^{1/2}}\right) dy. \quad (5.109)$$

を得る。

式(5-109)で極限を取り、 $R$ を $\infty$ に近づけることにより、ゆっくりとした地形の変化および緩やかな密度異常の状況に適用できる近似が得られ、それは以下のようなになる。

$$g_y = 2\pi G \int_0^h \rho(y) dy. \quad (5.110)$$

これがブーゲー重力式である。これは、ある地点での表面の重力異常とその地点の下での質量の過剰、あるいは不足とを関連させる。 $(\int_0^h \rho dy)$ は円形のディスクの単位表面積当たりの質量である)。その結果は、観測者が上に位置する特異な質量との距離である  $b$  から独立している。密度変化の水平方向のスケールが、 $h$ と  $b$ に比較して大きいならば、式(5-110)は正確な近似になる。

ブーゲー重力式は、特に地形による重力異常を得るときに役立つ。もし地形が高さ  $h$ と密度  $\rho_c$ を持つならば、式(5-110)から得られる重力異常は、

$$\Delta g = 2\pi\rho_c GH. \quad (5.111)$$

となる。この結果は、埋没した無限厚板による重力異常のために導き出した式と同一である。(式(5-105)参照)。密度  $\rho_c = 2670 \text{ kg m}^{-3}$ の時、高さ  $1 \text{ km}$ ごとの重力異常は、 $\Delta g = 1.12 \text{ mm s}^{-2}$ となる。

ブーゲー重力式を導き出す際、我々は平面構造を仮定した。地形の波長が地球半径と比較して小さい場合に限り、地形補正としてこの式を用いることは近い近似になる。

問5.16

密度 $2900 \text{ kg m}^{-3}$ の海山が深さ $5 \text{ km}$ の海底にあるとする。海山がちょうど海面に届くとするならば、予期される表面重力異常はいくらになるか。

(海山の幅と高さの比率が大きく、それが乗っている海底面を変位させないと仮定する。)

問5.17

式(5-109)を積分することによって、一定の特異な密度 $\Delta \rho$ をもった垂直円柱による、上面から距離 $b$ だけ離れた円柱軸上での重力異常が以下のようになることを示せ。

$$\Delta g = 2\pi G \Delta \rho \{h + (b^2 + R^2)^{1/2} - [(b+h)^2 + R^2]^{1/2}\}. \quad (5.112)$$

問5.18

直径 $10 \text{ km}$ の火山岩栓は、 $0.3 \text{ mm s}^{-2}$ の重力異常を持つ。岩栓が上面が表面に位置する垂直円柱によってモデル化できると仮定して、その深さを推定せよ。岩栓の密度は $3000 \text{ kg m}^{-3}$ で、岩栓の貫入した岩の密度は $2800 \text{ kg m}^{-3}$ であると仮定する。

問5.19

月の重力場は、軌道上の宇宙船の追跡によって決定されている。図5-13は月面から高度 $100 \text{ km}$ の近くでの重力異常の等高線図である。最も顕著な特徴は、円形の海と一致する正の重力異常である。これらは月面マスコンである。 $30^\circ \text{ N}$ 、 $17^\circ \text{ E}$ の周りに集中した晴れの海と関連した特異な質量の表面密度を決定せよ。

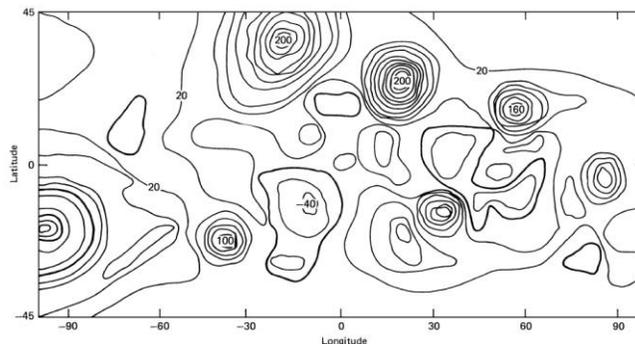


Figure 5.13 Lunar gravity anomalies at an altitude of  $100 \text{ km}$  (Sjogren, 1977). The values are in  $10^{-2} \text{ mm s}^{-2}$  and the contour interval is  $0.2 \text{ mm s}^{-2}$ .

## 5.8 重力データの整理

科学者は、様々な重力計を用いて重力を測る。これらのほとんどすべては、ばねに取り付けられた質量に作用している重力加速度が変化するとばねが伸縮する、という単純な原理に基づく。重力計は重力場の $10^7$ 分の1、あるいは $0.001\text{mm s}^{-2}$ の変化を容易に測定できる。表面の重力測定がなされるとき、表面の重力異常を得るために一連の補正が適用される。まず初めに、式(5-73)によって与えられた基準重力場 $g_0$ が引かれる。この減算は緯度による補正を含む。

重力測定が高度 $h$ で行われるならば、また、高度による重力の差異を説明するために補正が適用される。これは高度補正として知られている。式(5-15)を用いて、例えば、基準ジオイドからの高度 $h$ での万有引力の加速度の値と基準ジオイド上の値 $g_0$ を以下のように関連させることができる。

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{(r_0 + h)^2} \approx g_0 \left(1 - \frac{2h}{r_0}\right), \quad (5.113)$$

ここで $r_0$ は式(5-67)によって与えられる基準ジオイドの動径方向の位置である。したがって、高度補正 $\Delta g_h$ は

$$\Delta g_h = \frac{2hg_0}{r_0}. \quad (5.114)$$

となる。この $\Delta g_h$ は、測定が基準ジオイドよりも上の点でなされるならば、測定された重力に加算される。 $g_0=9.78\text{ms}^{-2}$ 、 $r_0=6378\text{km}$ から、高度 $1\text{km}$ での高度補正は $3.07\text{mms}^{-2}$ となる。この補正はしばしば、フリーエア補正と呼ばれる。重力の測定値が、緯度と高度によって補正されたなら、その結果はフリーエア異常 $\Delta g_{fa}$ となる。

短い波長でのフリーエア異常は、局所的な地形と強く相関する。局所的な地形による引力を除去するため、ブーゲー重力式が使われる。ブーゲー異常 $\Delta g_B$ は、以下によって与えられる。

$$\Delta g_B = \Delta g_{fa} - 2\pi G\rho_c h. \quad (5.115)$$

この単純な補正は、地殻の正確な密度が選ばれ、そして地形の変化が急すぎないのであれば、地形上の影響を取り除くために効果的である。地殻の密度の標準値は、 $\rho_c=2670\text{kg m}^{-3}$ である。測定の現場の近くに急な地形が存在するならば、追加の地形補正が適用されな

ればならない。

#### 問 5.20

測定地点における表面重力は $9.803243 \text{ m s}^{-2}$ である。この地点の緯度は北緯 $43^{\circ} 32' 16''$ で、標高は542.3mであった。フリーエア異常とブーゲー異常を求めよ。

#### 5.9埋め合わせ

ブーゲー重力式は、局所的な(短い波長の)地形の万有引力の影響を取り除くには効果的だが、地域的な(長い波長の)地形の影響を除去するには効果的ではない。その理由については、3-14節ですでに議論されたことだが、およそ10kmほどの小さい水平方向のスケールを持つ山や谷は、弾性を持つリソスフェアにより偏位することなく保持される。したがって、山や谷の存在は、深さによる密度分布に影響を与えない。しかし、およそ1000kmほどの大きな水平方向のスケールを持つ山脈による荷重はリソスフェアを下に偏位させる。モホ面は通常リソスフェアに埋め込まれることから、それもまた下方向にゆがめられる。地殻の岩石がマンツルの岩石よりも軽いことから、これは大きな水平方向のスケールを持つ山脈に低密度の「根」を結果として生じる。山の地形と関連した質量は、低密度の根によって深さでつり合いがとられる。

地形のためのブーゲー補正はこの低密度の根に対して説明をしないので、山脈の上でのブーゲー異常は大きく負である。式(3-115)で、長波長の区間で、山の根のネガティブな質量が、山のポジティブな質量を相殺することを示した。ブーゲー重力式(方程式(5-110))は、表面での重力異常を観測者の下の正味の質量の過剰、あるいは不足と関連づける。アイソスタシーの状態(静水圧平衡)が正味の質量の違いを与えないので、山脈の上での長波長のフリーエア異常が0に近いことが予測でき、実際、これは本当である。

山脈と関連したフリーエア異常とブーゲー異常の例は、図5-14に挙げられる。フリーエア異常は、短波長の地形と比例しているが、長波長の地形とは、少しの関連した構造も示さない。ブーゲー補正は、短波長の地形による影響を取り除き、輪郭を滑らかにする。しかし、ブーゲー異常は、長波長の地形の低密度の根を反映するので、大きく負である。

次に、リソスフェアの屈曲の埋め合わせと表面重力異常の影響の量的な考察について考える。しかし、それをする前に深さによる周期的な密度変化に起因する表面の重力異常を決定しよう。これは、我々がモホ面の変位の表面重力効果を決定することを可能にする。

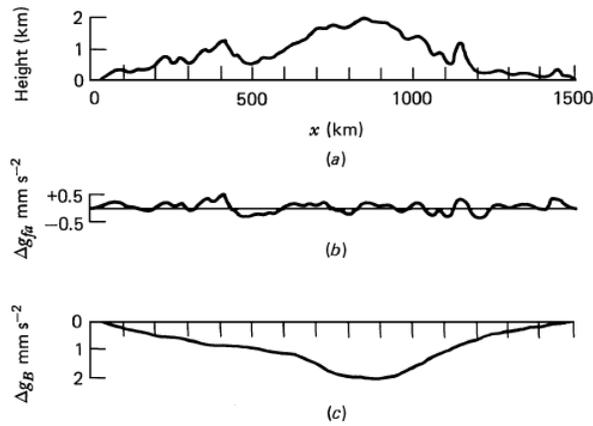


Figure 5.14 Free-air (b) and Bouguer (c) gravity anomalies associated with the topography given in (a).

### 5.10 表面における周期的質量分布の重力場

5-7節で導き出されたブーゲー重力式は、観測者がそのすぐ上に位置する特異な質量の層による万有引力の垂直成分を与える。この近似式は、観測者の位置する質量層からの高さが、その層の厚さとその層における水平方向の密度変化のスケールと比べて小さいときに限り有効である。この章では、観測者が質量層から横方向の密度変化のスケールと同等な高さに位置するときに、水平方向の密度変化のある質量層による万有引力加速度を決定することに着目する。このために、図5-15に描かれる状況を考える。質量は、 $y=0$ で、厚さを無視できる層に集中すると仮定される。層の単位面積当たりの質量  $\sigma$  は

$$\sigma = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h \rho(y) dy. \quad (5.116)$$

となる。層は、 $z$ の正、および負の方向に無限に広がり、質量の表面密度は、 $x$ 方向に関して周期的に変化し、以下のようなになる。

$$\sigma = \sigma_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad (5.117)$$

ここで、 $\sigma_0$ は、表面密度の変化の振幅であり、 $\lambda$ はその波長である。表面の層のすぐ上 ( $y=0$ )

一)では、層の引力の加速度の垂直成分が、ブーゲーの式(式(5-110))によって与えられ、

$$g_y = 2\pi G\sigma_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \quad \text{at } y = 0 - . \quad (5.118)$$

となる。我々は、どのように $g_y$ が $y$ に依存するかを決定することに興味がある。

質量分布に関連した万有引力ポテンシャル $V$ は、質量分布の外側のラプラス方程式を満たす。

ここでは二次元の質量分布を考慮して、

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (5.119)$$

と書くことができる。

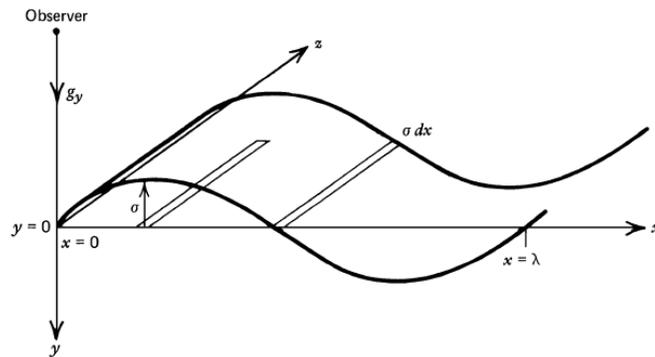


Figure 5.15 Gravitational acceleration due to a surface mass layer with horizontally varying density distribution.

万有引力加速度の垂直成分は、そのポテンシャルと以下のように関連がある。

$$g_y = -\frac{\partial V}{\partial y}. \quad (5.120)$$

したがって、式(5-119)の $y$ についての導関数を取り、式(5-120)を代入すると、以下の式を得る。

$$\frac{\partial^2 g_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_y}{\partial y^2} = 0. \quad (5.121)$$

万有引力加速度の垂直成分もまた、ラプラス方程式を満たしている。我々は、式(5-118)によって課せられる境界条件と観測者が質量シートから無限に離れることによって $g_y$ が0になるという前提条件

$$g_y(y \rightarrow -\infty) = 0. \quad (5.122)$$

に依存する微分方程式(5-121)を解くことによって $g_y$ の値を得ることができる。

すでに4-12節において周期的な境界条件での半空間におけるラプラス方程式を解いた。我々は式(4-58)との直接的な類似性によって、この節における問の解を、

$$g_y = 2\pi G\sigma_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda} e^{2\pi y/\lambda}. \quad (5.123)$$

と書くことができる。

重力異常は、質量層からの距離(- $y$ )で、指数的に減衰する。減衰にかかる長さのスケールは $\lambda/2\pi$ である。式(5-123)は、特異な質量分布よりも上の特定の高度で測定された、重力異常の上方、あるいは下方への連続の式を与える。 $X$ についてのどのような関数についても、種々の波長の周期的な寄与にフーリエ解析ができるので、観測されたどのような $g_y(x)$ でも式(5-123)を $g_y(x)$ の個々のフーリエ成分に適用し、それから修正された成分の重ね合わせによって新しい $g_y(x)$ を再構築することによって、任意のレベルに連続させることができる。